

数チャレ 第268回(2023年5月)

以下の問に答えよ.

- (1) 次の方程式の整数解をすべて求めよ.

$$20x + 23y = 1$$

- (2) $461^m - 24$ が 23^2 の倍数になる正の整数 m をすべて求めよ.

出典：2023 年 群馬大学 医学部

解答

(1) $20x + 23y = 1$ ①

$300 - 299 = 1$ に注目すると

$$20 \times 15 + 23 \times (-13) = 1 \quad \text{..... ②}$$

① - ② より

$$20(x - 15) + 23(y + 13) = 0$$

$$\therefore 20(15 - x) = 23(y + 13)$$

② より 20 と 23 は互いに素であるから

$$15 - x = 23n, \quad y + 13 = 20n$$

を満たす整数 n が存在し, ① のすべての整数解は

$$(x, y) = (-23n + 15, 20n - 13) \quad (n \text{ は整数}) \quad (\text{答})$$

である。

(2) $461 - 24 = 437 < 529 = 23^2$

$m \geq 2$ のとき, 二項定理より

$$461^m = (20 \cdot 23 + 1)^m = \sum_{k=0}^m {}^m C_k \cdot 20^k \cdot 23^k$$

であるから,

$$\begin{aligned} 461^m - 24 &= \sum_{k=2}^m {}^m C_k \cdot 20^k \cdot 23^k + 20 \cdot 23m - 23 \\ &= 23^2 \sum_{k=2}^m {}^m C_k \cdot 20^k \cdot 23^{k-2} + 23(20m - 1) \end{aligned}$$

が 23^2 の倍数となるのは $20m - 1$ が 23 の倍数になるときであり,

$$20m + 23l = 1$$

を満たす整数 l が存在する。(1) より

$$m = 23n + 15, \quad l = -20n - 13 \quad (n \text{ は整数})$$

と表されるから, 条件を満たす正の整数 m は

$$m = 23n + 15 \quad (n \text{ は非負整数}) \quad (\text{答})$$