

数チャレ 第269回(2023年6月)

自然数 n に対して, a_n, b_n を

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}$$

を満たす有理数とする。ただし, 4つの有理数 a, b, c, d が

$$a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$$

を満たせば $a = c$ かつ $b = d$ が成り立つので, a_n, b_n は各自然数 n に対し 1 通りに定まることに注意する。

- (1) n が 3 の倍数であるとき, a_n, b_n がともに整数となることを示せ。
- (2) 自然数 n が 3 の倍数であるとき, a_n, b_n のどちらか一方が偶数で他方が奇数となることを示せ。
- (3) a_n, b_n がともに整数となるのは n が 3 の倍数のときに限ることを示せ。

出典: 2023 年 鹿児島大学

解答

- (1) n が 3 の倍数であるとき

$$n = 3m \quad (m \text{ は自然数})$$

と表される。

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 1 \cdot 5 + 5\sqrt{5}}{2^3} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = (2 + \sqrt{5})^m = a_n + b_n\sqrt{5}$$

であるから,

$$a_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} m C_{2k} 2^{m-2k} 5^k, \quad b_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} m C_{2k+1} 2^{m-2k-1} 5^k$$

はともに整数である。

(証明おわり)

- (2) 数列の定義と (1) の考察より

$$\begin{aligned} a_{3(m+1)} + b_{3(m+1)}\sqrt{5} &= (2 + \sqrt{5})(a_{3m} + b_{3m}\sqrt{5}) \\ &= 2a_{3m} + 5b_{3m} + (a_{3m} + 2b_{3m})\sqrt{5} \end{aligned}$$

$m = 1$ のとき

$a_3 = 2$ は偶数, $b_3 = 1$ は奇数
 であり, a_3 と b_3 の偶奇は異なる。 a_{3m} が偶数, b_{3m} が奇数ならば,
 $2a_{3m} + 5b_{3m}$ は奇数, $a_{3m} + 2b_{3m}$ は偶数
 であり, a_{3m} が奇数, b_{3m} が偶数ならば,
 $2a_{3m} + 5b_{3m}$ は偶数, $a_{3m} + 2b_{3m}$ は奇数
 であるから, 数学的帰納法により, すべての 3 の倍数の自然数 $3m$ に対して a_{3m} と b_{3m} の偶奇が異なることが示された。 (おわり)

(3) 数列の定義より

$$\begin{aligned}
 a_{3m+1} + b_{3m+1}\sqrt{5} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}(a_{3m} + b_{3m}\sqrt{5}) \\
 &= \frac{a_{3m} + 5b_{3m}}{2} + \frac{a_{3m} + b_{3m}}{2}\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

(2) より a_{3m} と b_{3m} の偶奇は異なるから, $a_{3m} + 5b_{3m}$ と $a_{3m} + b_{3m}$ はともに奇数であり,

$$a_{3m+1} = \frac{a_{3m} + 5b_{3m}}{2}, \quad b_{3m+1} = \frac{a_{3m} + b_{3m}}{2} \text{ はどちらも整数でない}$$

ことがわかる。

$$\begin{aligned}
 a_{3m+2} + b_{3m+2}\sqrt{5} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 (a_{3m} + b_{3m}\sqrt{5}) \\
 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}(a_{3m} + b_{3m}\sqrt{5}) \\
 &= \frac{3a_{3m} + 5b_{3m}}{2} + \frac{a_{3m} + 3b_{3m}}{2}\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

(2) より a_{3m} と b_{3m} の偶奇は異なるから, $3a_{3m} + 5b_{3m}$ と $a_{3m} + 3b_{3m}$ はともに奇数であり,

$$a_{3m+2} = \frac{3a_{3m} + 5b_{3m}}{2}, \quad b_{3m+2} = \frac{a_{3m} + 3b_{3m}}{2} \text{ はどちらも整数でない}$$

ことがわかる。

(1) の結果とあわせて, a_n, b_n がともに整数であるための必要十分条件は, n が 3 の倍数となることである。 (証明おわり)