

数チャレ 第270回(2023年7月)

整数の組 (x, y, z) が次の2つの式をともに満たすとき, (x, y, z) は $(*)$ を満たす整数の組であるという。

$$(*) \quad z^2 + y^2 + x^2 - 3xyz = 0, \quad 0 < x < y < z$$

例えば, $(1, 2, 5)$ は $(*)$ を満たす整数の組である。

(1) $(2, 5, a)$ が $(*)$ を満たす整数の組となるような整数 a を求めよ。

(2) 次の条件 (i), (ii) をともに満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することを示せ。

(i) $a_1 = 1, a_2 = 2$ である。

(ii) 任意の自然数 n に対して, (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) は $(*)$ を満たす整数の組である。

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ はただ1つである。この数列 $\{a_n\}$ について, a_n が偶数となる n をすべて求めよ。

出典: 2023 年 山梨大学 医学部

解答

(1) $(2, 5, a)$ が $(*)$ を満たすとき

$$2^2 + 5^2 + a^2 - 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a = 0$$

$$a^2 - 30a + 29 = 0$$

$$(a - 1)(a - 29) = 0$$

$a > 5$ より

$$a = 29 \quad (\text{答})$$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 2,$

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 - 3a_n a_{n+1} a_{n+2} = 0, \quad 0 < a_n < a_{n+1} < a_{n+2}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の各項が整数であることを示す。

$$1^2 + 2^2 + a_3^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot a_3 = 0$$

$$a_3^2 - 6a_3 + 5 = 0$$

$$(a_3 - 1)(a_3 - 5) = 0$$

$a_2 = 2 < a_3$ より

$$a_3 = 5$$

a_k, a_{k+1}, a_{k+2} が整数であるとする。

$$a_k^2 + a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 - 3a_k a_{k+1} a_{k+2} = 0$$

$$a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + a_{k+3}^2 - 3a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} = 0$$

が同時に成り立つから, 差をとることにより

$$a_{k+3}^2 - a_k^2 - 3a_{k+1} a_{k+2} (a_{k+3} - a_k) = 0$$

$$(a_{k+3} - a_k)(a_{k+3} + a_k - 3a_{k+1} a_{k+2}) = 0$$

$a_k < a_{k+1} < a_{k+2} < a_{k+3}$ より $a_{k+3} \neq a_k$ であるから

$$a_{k+3} + a_k - 3a_{k+1}a_{k+2} = 0$$

$$\therefore a_{k+3} = 3a_{k+1}a_{k+2} - a_k$$

よって、 a_{k+3} も整数であり、数学的帰納法により、任意の自然数に対して a_n は整数であることが示された。 (おわり)

(3) (2)の数列 $\{a_n\}$ は、隣接 4 項間漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 5, \quad a_{k+3} = 3a_{k+2}a_{k+1} - a_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定まるから、

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$a_3 = 5 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$a_4 \equiv 3 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$a_5 \equiv 3 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$a_6 \equiv 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$a_7 \equiv 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$a_{n+4} \equiv a_n \pmod{2}$ となることにも注意すると、 a_n が偶数となるための条件は n が 4 で割れない偶数 (答)

となることである。