

数チャレ 第272回(2023年9月)

$(m+ni)^3 = -9 - 46i$ を満たす整数 m, n を求めよ。ただし， i は虚数単位である。

解答

$$\begin{aligned}(m+ni)^3 &= m^3 + 3m^2ni - 3mn^2 - n^3i \\&= m(m^2 - 3n^2) + n(3m^2 - n^2)i \\&= -9 - 46i\end{aligned}$$

において実部，虚部をそれぞれ比べると

$$\begin{cases} m(m^2 - 3n^2) = -9 \\ n(3m^2 - n^2) = -46 \end{cases} \quad \dots\dots \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}$$

①より

$$(m, m^2 - 3n^2) = (1, -9), (3, -3), (9, -1), (-1, 9), (-3, 3), (-9, 1)$$

$$(m, 3n^2) = (1, 10), (3, 12), (9, 82), (-1, -8), (-3, 6), (-9, 80)$$

n が整数であることを満たすのは

$$(m, 3n^2) = (3, 12)$$

の場合に限られ，

$$(m, n) = (3, \pm 2)$$

$m = 3, n = 2$ のとき

$$n(3m^2 - n^2) = 2 \times (3 \times 9 - 4) = 46$$

$m = 3, n = -2$ のとき

$$n(3m^2 - n^2) = -2 \times (3 \times 9 - 4) = -46$$

以上の考察から， $(m+ni)^3 = -9 - 46i$ を満たす整数 m, n は

$$(m, n) = (3, -2) \quad (\text{答})$$