数チャレ 第273回(2023年10月)

任意の自然数 n に対して，x^2+1 が 5^n で割り切れるような整数 x が存在することを数学積帰納法で証明せよ。

解答

$n=1$ のとき

$$2^2+1=5$$

は 5^1 で割り切れ，$x=2$ が条件を満たす。

自然数 k に対して

$$x^2+1\equiv 0 \pmod{5^k}$$

を満たす整数 x があるとすれば，

$$x^2=-1+5^k a \quad (a\text{は整数})$$

と表される。

$$y=x+5^k b$$

とおくと，

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2+2x\cdot 5^k b+5^{2k}b^2 \\ &= -1+5^k(a+2bx)+5^{k+1}\cdot 5^{k-1}b^2 \\ &\equiv -1+5^k(a+2bx) \pmod{5^{k+1}} \end{aligned}$$

2 も x も 5 と互いに素であるから，

$$2x\cdot c+5d=1$$

を満たす整数 $c,\ d$ が存在する。

$$b=-ac$$

と定めると，

$$a+2bx=a-2acx=a(1-2cx)=a\cdot 5d$$

であり，

$$y^2+1\equiv 5^k(a+2bx)\equiv 0 \pmod{5^{k+1}}$$

(証明おわり)

ⓒ 早稲田数学フォーラム