

数チャレ 第275回 (2023年12月)

連続する3つの自然数 $n, n+1, n+2$ を10進数表示のまま並べてできる6つの数の最大公約数を d_n とする。例えば, $n=99$ のとき

$$99100101, 99101100, 10099101, 10010199, 10199100, 10110099$$

の最大公約数が d_{99} である。

- (1) d_4 を求めよ。
- (2) 任意の自然数 n に対して, d_n は3で割り切れることを示せ。
- (3) n が2桁の自然数であるとき d_n の最大値 g を求め, $d_n = g$ となる2桁の自然数 n をすべて求めよ。

解答

(1) 4, 5, 6 を並べ替えてできる自然数をそれぞれ素因数分解すると

$$456 = 2^3 \times 3 \times 19, \quad 465 = 3 \times 5 \times 31, \quad 546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13,$$

$$564 = 2^2 \times 3 \times 47, \quad 645 = 3 \times 5 \times 43, \quad 654 = 2 \times 3 \times 109$$

となるから, 最大公約数 d_4 は

$$d_4 = 3 \quad (\text{答})$$

(注) 456 と 465 を調べた時点で

$$d_4 = 1 \quad \text{または} \quad d_4 = 3$$

に限られ, 456, 465, 546, 564, 645, 654 はいずれも各位の数の和が

$$4 + 5 + 6 = 15$$

となって3の倍数であることから, $d_4 = 3$ と結論付けてもよい。

(2) 10進表示で $m+1$ 桁の自然数 M は

$$M = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

(a_k は0から9までの整数, $a_m \neq 0$)

$$= a_m(10^m - 1) + a_{m-1}(10^{m-1} - 1) + \cdots + a_1(10 - 1)$$

$$+ a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

と表される。

$$10^k - 1 = 99 \cdots 9 \text{ は } 9 \text{ の倍数(したがって } 3 \text{ の倍数)}$$

であるから,

$$M \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{3}$$

$n, n+1, n+2$ の桁数をそれぞれ s, t, u とすると, $n, n+1, n+2$ を並べ替えてできる数 N は

$$10^{t+u}n + 10^u(n+1) + (n+2), \quad 10^{t+u}n + 10^t(n+2) + (n+1),$$

$$10^{s+u}(n+1) + 10^u n + (n+2), \quad 10^{s+u}(n+1) + 10^s(n+2) + n,$$

$$10^{s+t}(n+2) + 10^t n + (n+1), \quad 10^{s+t}(n+2) + 10^s(n+1) + n$$

であり, 上と同様の議論により, いずれの場合も

$$N \equiv n + (n + 1) + (n + 2) \equiv 3(n + 1) \equiv 0 \pmod{3}$$

$n, n + 1, n + 2$ を並べ替えてできる 6 つの数はいずれも 3 で割り切れるから、
 d_n は 3 で割り切れる。 (証明おわり)

(注) 自然数 n を 10 進表示したときの各位の数の和を $\sigma(n)$ で表すとき、必ずしも
 $\sigma(n + 1) = \sigma(n) + 1, \sigma(n + 2) = \sigma(n) + 2$ とは限らない。

(3)(i) $n = 99$ のとき

$$99101100 - 99100101 = 999$$

より

$$d_{99} \text{ は } 999 = 3^3 \times 37 \text{ の約数}$$

であることが必要であるが、

$$9 + 9 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 = 21,$$

$$99100101 = 37 \times 2678381 + 4$$

より d_{99} は 9 でも 37 でも割り切れないから、

$$d_{99} \text{ は } 3 \text{ の約数}$$

である。(2)より d_{99} は 3 の倍数であるから

$$d_{99} = 3$$

(ii) $n = 98$ のとき

$$1009998 - 1009899 = 99$$

より

$$d_{98} \text{ は } 99 = 9 \times 11 \text{ の約数}$$

であることが必要であるが、

$$9 + 8 + 9 + 9 + 1 + 0 + 0 = 36 = 9 \times 4$$

$$9899100 = 11 \times 899918 + 2$$

より

$$d_{98} = 9$$

(iii) $10 \leq n \leq 97$ のとき、 $n, n + 1, n + 2$ はいずれも 2 桁の自然数であり、

$$100(n + 1) + n - (100n + n + 1) = 99$$

であるから、必要条件として

$$d_n \text{ は } 99 \text{ の約数}$$

である。したがって、もし $d_n = 99$ となる 2 桁の自然数 n が存在すれば、最大値 g は $g = 99$ である。

$n, n + 1, n + 2$ はいずれも 2 桁であることに注意して、(1)と同様に考えると

$$\begin{aligned} 10000n + 100(n + 1) + (n + 2) &= (9999 + 1)n + (99 + 1)(n + 1) + (n + 2) \\ &= 99(101n + n + 1) + n + (n + 1) + (n + 2) \\ &\equiv 3(n + 1) \pmod{99} \end{aligned}$$

$$10000n + 100(n + 2) + (n + 1) \equiv 3(n + 1) \pmod{99}$$

$$10000(n + 1) + 100n + (n + 2) \equiv 3(n + 1) \pmod{99}$$

$$10000(n+1) + 100(n+2) + n \equiv 3(n+1) \pmod{99}$$

$$10000(n+2) + 100n + (n+1) \equiv 3(n+1) \pmod{99}$$

$$10000(n+2) + 100(n+1) + n \equiv 3(n+1) \pmod{99}$$

となるから,

$$99 \mid d_n \iff 33 \mid n+1 \iff 11 \mid n+1 \text{ かつ } 3 \mid n+1$$

n は 10 以上 97 以下の自然数であるから

$$11 \mid n+1 \iff n = 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87$$

$$3 \mid n+1 \iff n = 11, 14, 17, 20, \dots, 95$$

であり,

$$n = 32, 65$$

のとき $d_n = 99$ となるから,

$$g = 99$$

である。

(i), (ii), (iii) より, d_n の最大値 g は

$$g = 99 \quad (\text{答})$$

であり, $d_n = 99$ となる n は

$$n = 32, 65 \quad (\text{答})$$

ですべてである。