数チャレ 第276回 (2024年1月)

(1) $\dfrac{2024}{n(n+1)}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{2024}{n(n+2)}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解答

(1) n と $n+1$ の偶奇が異なり，一方は必ず奇数であることに注目する。

$$2024 = 2^3 \times 11 \times 23$$

の正の奇数である約数は 1, 11, 23, 253 であるから，$n(n+1)$ が 2024 の約数であるとすれば

$$1 \times 2,\ 10 \times 11,\ 11 \times 12,\ 22 \times 23,\ 23 \times 24,\ 252 \times 253,\ 253 \times 254$$

に限られる。この中で実際に 2024 の約数となるのは

$$1 \times 2,\ \ 22 \times 23$$

であり，求める自然数 n は

$$n = 1,\ 22 \quad (答)$$

(2) n と $n+2$ の偶奇は等しいが，$n(n+2)$ が 2024 の約数ならば

$n,\ n+2$ はともに偶数

となるが，差が 2 であることより

$n,\ n+2$ の一方は 4 の倍数，他方は 4 で割れない偶数

である。$2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ の約数の中では

$2^2 \times (奇数)$ と $2 \times (奇数)$

の 2 数であり，

$$\{4,\ 2\},\ \{4\times1,\ 2\times11\},\ \{4\times11,\ 2\times1\},\ \{4\times1,\ 2\times23\},\ \{4\times23,\ 2\times1\},$$
$$\{4\times1,\ 2\times253\},\ \{4\times253,\ 2\times1\},\ \{4\times11,\ 2\times23\},\ \{4\times23,\ 2\times11\}$$

が候補であるから，差が 2 のものを選ぶと

$$\{2,\ 4\},\ \{44,\ 46\}$$

に定まり，求める自然数 n は

$$n = 2,\ 44 \quad (答)$$

ⓒ 早稲田数学フォーラム