

数チャレ 第277回(2024年2月)

多項式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ は、ある多項式 $P(x, y, z)$ により $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)P(x, y, z)$ と因数分解される。

- (1) $P(x, y, z)$ および $P(x, y, z) - \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2\}$ を求めよ。
- (2) 自然数 x, y, z が $x < y < z$ を満たすならば、 $P(x, y, z) \geq 3$ であることを証明せよ。また、等号が成立するための条件を求めよ。
- (3) 条件式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 91$, $x < y < z$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

出典：2014 年 中央大学 理工学部

解答

(1)
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
 と因数分解されるから、
$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \quad (\text{答})$$
$$P(x, y, z) - \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} - \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(z-x)^2 \quad (\text{答})$$

(2) x, y, z が自然数で $x < y < z$ を満たすならば、
$$(x-y)^2 \geq 1^2, \quad (y-z)^2 \geq 1^2, \quad (z-x)^2 \geq 2^2$$
 であるから、
$$P(x, y, z) \geq \frac{1}{2}(1+1+4) = 3 \quad (\text{答})$$

不等式の等号成立条件は

$$y - x = 1 \quad \text{かつ} \quad z - y = 1 \quad \text{かつ} \quad z - x = 2$$

であり、

$$y = x + 1 \quad \text{かつ} \quad z = y + 1 \quad (\text{答})$$

(3) 自然数 x, y, z が
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)P(x, y, z) = 91$$
 を満たすとすれば、 $x + y + z \geq 3$, $P(x, y, z) \geq 3$ より
$$(x + y + z, P(x, y, z)) = (7, 13) \text{ または } (13, 7)$$
 $(y - x, z - y) = (1, 1)$ のとき
$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2 + 2^2) = 3$$
 $(y - x, z - y) = (1, 2), (2, 1)$ のとき

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2) = 7$$

$(y - x, z - y) = (1, 3), (3, 1)$ のとき

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}(1^2 + 3^2 + 4^2) = 13$$

$(y - x, z - y) = (2, 2)$ のとき

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}(2^2 + 2^2 + 4^2) = 12$$

$z - x \geq 5$ のとき

$$P(x, y, z) \geq \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 5^2) = 15$$

(i) $P(x, y, z) = 13$ のとき

$$(y - x, z - y) = (1, 3) \text{ または } (3, 1)$$

に限られ,

$$(y, z) = (x + 1, x + 4) \text{ または } (x + 3, x + 4)$$

$$x + y + z = 3x + 5 \text{ または } 3x + 7$$

いずれも $x + y + z = 7$ とならないから不適である。

(ii) $P(x, y, z) = 7$ のとき

$$(y - x, z - y) = (1, 2) \text{ または } (2, 1)$$

に限られ,

$$(y, z) = (x + 1, x + 3) \text{ または } (x + 2, x + 3)$$

$$x + y + z = 3x + 4 \text{ または } 3x + 5$$

$$x + y + z = 13 \text{ より}$$

$$x = 3, y = 4, z = 6$$

以上より, 条件を満たす自然数の組は

$$(x, y, z) = (3, 4, 6) \quad (\text{答})$$

ですべてである。