

# 数チャレ 第278回 (2024年3月)

$31^2$ を7で割った余りは  であり、 $31^3$ を7で割った余りは  となる。同様に考えると、自然数  $k$  について、 $31^k$ を7で割った余りが1となるのは、 $k$ が  の倍数となるときである。一方、 $31^k$ を11で割った余りが1となるのは、 $k$ が  の倍数となるときである。ただし、  $> 0$ 、  $> 0$  である。

以上より、 $31^k$ を7で割った余りと11で割った余りがともに4になる  $k$  を具体的に求めることができる。そのような自然数  $k$  で最小のものは  であり、5番目に小さなものは  となる。

出典：2024年 立命館大学

## 解答

$$31 = 7 \times 4 + 3 \equiv 3 \pmod{7} \text{ より}$$

$$31^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv \boxed{2} \pmod{7}$$

(オ)

$$31^3 = 31 \times 31^2 \equiv 3 \times 2 \equiv \boxed{6} \equiv -1 \pmod{7}$$

(カ)

$$31^6 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

であるから、 $31^k \equiv 1 \pmod{7}$  となる自然数  $k$  は  の倍数である。

(キ)

$$31 = 11 \times 3 - 2 \equiv -2 \pmod{11}$$

$$31^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$31^3 \equiv (-2)^3 \equiv -8 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$31^4 \equiv (-2)^4 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$31^5 = 31 \times 31^4 \equiv -2 \times 5 \equiv 1 \pmod{11}$$

であるから、 $31^k \equiv 1 \pmod{11}$  となる自然数  $k$  は  の倍数である。

(ク)

$$31^k \equiv 4 \pmod{7} \iff k \equiv 4 \pmod{6}$$

$$31^k \equiv 4 \pmod{11} \iff k \equiv 2 \pmod{5}$$

であることに注意すると、 $31^k$ を7で割った余りと11で割った余りがともに4となるのは、

$$k = 6x + 4 = 5y + 2$$

を満たす整数  $x, y$  が存在するときである。

$$(k + 8 =) 6(x + 2) = 5(y + 2)$$

6と5は互いに素であるから、

$$x + 2 = 5n, \quad y + 2 = 6n$$

を満たす整数  $n$  が存在し,

$$x = 5n - 2, \quad y = 6n - 2$$

よって,  $31^k$  を 7 で割った余りと 11 で割った余りがともに 4 となるような自然数  $k$  は

$$k = 6(5n - 2) + 4 = 30n - 8 \quad (n \text{ は自然数})$$

と表され,

$$\text{最小のものは } 30 \times 1 - 8 = \boxed{22} \quad (\text{ケ})$$

$$5 \text{ 番目に小さなものは } 30 \times 5 - 8 = \boxed{142} \quad (\text{コ})$$

である。