

## 数チャレ 第280回 (2024年5月)

以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数  $a, b$  が  $a < b$  をみたすとき,  $\frac{b!}{a!} \geq b$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $2 \cdot a! = b!$  をみたす自然数の組  $(a, b)$  をすべて求めよ。
- (3)  $a! + b! = 2 \cdot c!$  をみたす自然数の組  $(a, b, c)$  をすべて求めよ。

出典：2024年 九州大学

### 解答

- (1) 自然数  $a, b$  が  $a < b$  をみたすとき,

$$b - 1 \geq a$$

$$b! = b \cdot (b - 1)! \geq b \cdot a! \quad \therefore \frac{b!}{a!} \geq b$$

(証明おわり)

- (2)  $2 \cdot a! = b!$  のとき, (1)より

$$2 = \frac{b!}{a!} \geq b$$

であるから,

$$b = 1 \text{ または } 2$$

$$b! = 2 \cdot a! \geq 2 \text{ より}$$

$$b = 2$$

このとき  $a = 1$  であるから,  $2 \cdot a! = b!$  をみたす自然数の組は

$$(a, b) = (1, 2) \quad (\text{答})$$

のみである。

- (3) まず  $a \leq b$  の場合を考える。ここで,  $a < b$  であるとすれば,

$$a! < b!$$

であり,  $c! = \frac{a! + b!}{2}$  より

$$a! < c! < b!$$

特に  $b \geq c + 1$  となるから,

$$b! - c! \geq c!(c + 1 - 1) = c \cdot c! > a \cdot c! \geq c!$$

$$c! < b! - c! = c! - a! < c!$$

となって矛盾する。したがって,

$$a = b = c$$

$a \geq b$  とした場合も同様であるから,  $a! + b! = 2 \cdot c!$  をみたす自然数の組は

$$(a, b, c) = (n, n, n) \quad (n \text{ は自然数}) \quad (\text{答})$$

ですべてである。