

数チャレ 第281回(2024年6月)

n を正の整数とする。 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ を、それぞれ 0 または 1 とするとき、 $a_n \times (-2)^{n-1} + a_{n-1} \times (-2)^{n-2} + \dots + a_2 \times (-2)^1 + a_1$ と表される整数を $[a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1]$ と表現する。例えば、

$$[110] = 1 \times (-2)^2 + 1 \times (-2)^1 + 0 = 2 \text{ であり、}$$

$$[1110] = 1 \times (-2)^3 + 1 \times (-2)^2 + 1 \times (-2)^1 + 0 = -6 \text{ である。}$$

また、ある n に対して $[a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1]$ と表すことのできる整数全体の集合を S_n とする。例えば、 $S_1 = \{0, 1\}$ 、 $S_2 = \{-2, -1, 0, 1\}$ である。以下の設問に答えよ。

- (1) S_3 を要素を書き並べて表せ。答えだけで良い。
- (2) S_n の要素は連続する 2^n 個の整数であることを示せ。さらに S_n の要素 x に対して、 $x = [a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1]$ と表すことのできる $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ の組は、ただ一通りであることを示せ。
- (3) -24 を $[a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1]$ と表せ。
- (4) 2024 を $[a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1]$ と表せ。

出典：2024 年 関西医科大学

解答

- (1) S_3 の要素は、 $S_2 = \{-2, -1, 0, 1\}$ の要素に $1 \times (-2)^2$ を加えたものが追加されるから、

$$S_3 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad (\text{答})$$

- (2) S_{2n} の要素は、

$$-\sum_{k=1}^n 2^{2k-1} = -\frac{2(4^n - 1)}{4 - 1} = -\frac{2}{3}(4^n - 1) \text{ 以上}$$

$$\sum_{k=1}^n 4^{k-1} = \frac{4^n - 1}{3} \text{ 以下}$$

の連続する $4^n = 2^{2n}$ 個の整数から成ると予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。

$S_2 = \{-2, -1, 0, 1\}$ であるから、 $n = 1$ のときは正しい。

$n \leq k$ で成り立つとすれば、 S_{2k+1} の要素は S_{2k} の要素に $(-2)^{2k} = 4^k$ を加えたも

のが追加されるから，

$$-\frac{2}{3}(4^k - 1) \text{ 以上 } \frac{4^k - 1}{3} + 4^k = \frac{4^{k+1} - 1}{3} \text{ 以下}$$

の連続する 2^{2k+1} 個の整数から成る。 S_{2k+2} の要素は，さらに $(-2)^{2k+1} = -2 \cdot 4^k$ を加えたものが追加されるから，

$$-\frac{2}{3}(4^k - 1) - 2 \cdot 4^k = -\frac{2}{3}(4^{k+1} - 1) \text{ 以上 } \frac{4^{k+1} - 1}{3} \text{ 以下}$$

の連続する 2^{2k+2} 個の整数から成る。したがって，すべての自然数 n に対して，

$$S_{2n} \text{ の要素は } -\frac{2}{3}(4^n - 1) \text{ 以上 } \frac{4^n - 1}{3} \text{ 以下}$$

の連続する 2^{2n} 個の整数から成る

ことが示された。また，考察過程で

S_{2k+1} の要素は連続する 2^{2k+1} 個の連続する整数から成る

ことも示されたことになるので， $S_1 = \{0, 1\}$ の場合とあわせて，

S_n の要素は連続する 2^n 個の連続する整数から成る

ことが示された。 (前半の証明おわり)

a_k は 0 と 1 のいずれかであるから，

$[a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1]$ で表現される整数の個数は最大 2^n 個

であるが，前半で示したように S_n の要素は 2^n 個の (連続する) 相異なる整数から成るから， $x \in S_n$ に対して

$$x = [a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1]$$

となる整数 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ の組は一意に定まる。 (後半の証明おわり)

(3) -24 は $S_6 = \{-42, -41, \dots, 21\}$ に属することを考えて，

$$(-2)^5 = -32, \quad (-2)^4 = 16, \quad (-2)^3 = -8, \dots$$

を順にとっていくことにより，

$$-24 = -32 + 8 = -32 + 16 - 8 = [111000] \quad (\text{答})$$

が得られ，(2)によりこれ以外の表現は存在しない。

(4) S_{2n-1} と S_{2n} の要素の最大値がともに $\frac{4^n - 1}{3}$ であることを考え，

$$2024 \leq \frac{4^n - 1}{3}$$

とおくと，

$$4^n \geq 6073$$

であり， $4^6 = 4096$ ， $4^7 = 16384$ より

$$n \geq 7, \quad 2024 \in S_{13}$$

であることがわかる。 $(-2)^{12} = 4096$ ， $(-2)^{11} = -2048$ ， $\dots$ を考えていくと，

$$\begin{aligned} 2024 &= 4096 - 2048 - 24 = (-2)^{12} + (-2)^{11} + [111000] \\ &= [1100000111000] \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

が得られ，(2)によりこれ以外の表現は存在しない。