

数チャレ 第282回 (2024年7月)

m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (問 1) $k^2 - \ell^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 (k, ℓ) の個数を m を用いて表せ。
- (問 2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で 3 の倍数でないものを m を用いて表せ。
- (問 3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。

出典：2024 年 熊本大学

解答

(問 1) $k^2 - \ell^2 = 3^m$ は

$$(k + \ell)(k - \ell) = 3^m$$

と書ける。

$$k + \ell > k - \ell > 0$$

二注意すると、 m が偶数のときは

$$(k + \ell, k - \ell) = (3^m, 1), (3^{m-1}, 3), \dots, (3^{\frac{m}{2}+1}, 3^{\frac{m}{2}-1})$$

m が奇数のときは

$$(k + \ell, k - \ell) = (3^m, 1), (3^{m-1}, 3), \dots, (3^{\frac{m+1}{2}}, 3^{\frac{m-1}{2}})$$

と求められるから、 $k^2 - \ell^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 (k, ℓ) の個数は

$$m \text{ が偶数のときは } \frac{m}{2}, \quad m \text{ が奇数のときは } \frac{m+1}{2} \quad (\text{答})$$

である。

(問 2) $\sqrt{x(x+3^m)} = n$ (n は正の整数) とおくと、

$$x(x+3^m) = n^2$$

$$4x^2 + 4 \cdot 3^m x = 4n^2$$

$$(2x + 3^m)^2 - 3^{2m} = (2n)^2$$

$$(2x + 3^m + 2n)(2x + 3^m - 2n) = 3^{2m}$$

問 1 と同様に考えて、

$$(2x + 3^m + 2n, 2x + 3^m - 2n)$$

$$= (3^{2m}, 1), (3^{2m-1}, 3), (3^{2m-2}, 3^2), \dots, (3^{m+1}, 3^{m-1})$$

$$\begin{aligned} \therefore (2x + 3^m, 2n) &= \left(\frac{3^{2m} + 1}{2}, \frac{3^{2m} - 1}{2} \right), \left(\frac{3^{2m-1} + 3}{2}, \frac{3^{2m-1} - 3}{2} \right), \\ &\left(\frac{3^{2m-2} + 3^2}{2}, \frac{3^{2m-2} - 3^2}{2} \right), \dots \\ &\dots, \left(\frac{3^{m+1} + 3^{m-1}}{2}, \frac{3^{m+1} - 3^{m-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (*)$$

自然数 x が 3 の倍数でないとき、 $2x + 3^m$ も 3 で割り切れないから、

$$2x + 3^m = \frac{3^{2m} + 1}{2}, \quad 4n = 3^{2m} - 1$$

の場合に限られ、 $3^{2m} = 9^m \equiv 1 \pmod{4}$ および $3^{2m} \geq 9 > 1$ より n は自然数であり、 3^m は 3 以上の奇数であるから、

$$x = \frac{3^{2m} - 2 \cdot 3^m + 1}{4} = \left(\frac{3^m - 1}{2} \right)^2 \quad (\text{答})$$

も自然数である。

(問 3) (*) より

$$2x + 3^m = \frac{3^{2m-k} + 3^k}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3^{2m-k} - 2 \cdot 3^m + 3^k}{4} \\ &= 3^k \cdot \frac{3^{2m-2k} - 2 \cdot 3^{m-k} + 1}{4} \\ &= 3^k \left(\frac{3^{m-k} - 1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4n &= 3^{2m-k} - 3^k \\ &= 3^k(9^{m-k} - 1) \equiv 3^k(1^{m-k} - 1) \equiv 0 \pmod{4} \end{aligned}$$

であるから、(*) に列挙した (x, n) は すべて自然数の組となる。したがって、 $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x は

$$x = 3^k \left(\frac{3^{m-k} - 1}{2} \right)^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1) \text{ の } m \text{ 個} \quad (\text{答})$$

ある。