

数チャレ 第283回(2024年8月)

- (1) $\frac{10}{13}$ を(10進表示の)循環小数で表せ。
- (2) $10^m \equiv 1 \pmod{13}$ を満たす自然数 m の最小値を求めよ。
- (3) $a^n \equiv 1 \pmod{13}$ を満たす自然数 n の最小値が12となるような自然数 a を $0 < a < 13$ の範囲ですべて求めよ。

解答

(1)

$$\begin{array}{r}
 0.769230 \\
 13 \overline{) 10} \\
 \underline{91} \\
 90 \\
 \underline{78} \\
 120 \\
 \underline{117} \\
 30 \\
 \underline{26} \\
 40 \\
 \underline{39} \\
 10
 \end{array}$$

より

$$\frac{10}{13} = 0.\dot{7}6923\dot{0} \quad (\text{答})$$

- (2) (1)より

$$\frac{10}{13} \times 10^6 - \frac{10}{13} = 769230 \text{ は整数}$$

であるから,

$$10^7 \equiv 10 \pmod{13}$$

10と13は互いに素であるから

$$10^6 \equiv 1 \pmod{13}$$

(1)の結果より

$$\frac{10}{13} = 0.\dot{7}6923\dot{0}, \quad \frac{10^2}{13} = 7.\dot{6}9230\dot{7}, \quad \frac{10^3}{13} = 76.\dot{9}2307\dot{6},$$

$$\frac{10^4}{13} = 769.\dot{2}3076\dot{9}, \quad \frac{10^5}{13} = 7692.\dot{3}0769\dot{2}, \quad \frac{10^6}{13} = 76923.\dot{0}7692\dot{3}$$

となることがわかるが, ここで小数部分が相異なることは $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ を13で割った余りが相異なることを意味するから, 6乗して初めて1と合同になる。よって, $10^m \equiv 1 \pmod{13}$ を満たす自然数 m の最小値は

$$6 \quad (\text{答})$$

である。

(3) (2)より,

$$a^2 \equiv 10 \pmod{13}$$

を満たす自然数 a は $a^n \equiv 1 \pmod{13}$ を満たす自然数 n の最小値が 12 となる。

$$10 \equiv 36 \equiv 6^2 \pmod{13}$$

であるから,

$$a = 6$$

は 12 乗して初めて 13 で割った余りが 1 となる。12 と互いに素な 12 以下の自然数は 1, 5, 7, 11 であるから, そのような自然数 a は

$$6, 6^5, 6^7, 6^{11} \pmod{13}$$

ですべてである。 $0 < a < 13$ の範囲で求めると

$$6^5 = 36^2 \times 6 \equiv (-3)^2 \times 6 \equiv 54 \equiv 2 \pmod{13}$$

$$6^7 = 6^5 \times 36 \equiv 2 \times (-3) \equiv -6 \equiv 7 \pmod{13}$$

$$6^{11} = 6^5 \times 6^6 \equiv 2 \times (-1) \equiv -2 \equiv 11 \pmod{13}$$

であるから, $a^n \equiv 1 \pmod{13}$ を満たす自然数 n の最小値が 12 となるような自然数 a は, 13 を法として

$$2, 6, 7, 11 \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(参考) 本問の (3) で求めた自然数 a を 1 つ用いると, 0 を除く 13 で割った余りの集合 $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ は $\{\overline{a}, \overline{a^2}, \dots, \overline{a^{12}}\}$ と表される。このとき, a の剰余類 $\overline{a}$ を 13 を法とする 1 の原始根という。

一般に 1 の原始根を見つけるのは, 理屈はわかっているが大変な作業になる。本問では結果的に 2 が原始根の一つではあったが, $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{12}$ をそれぞれ 13 で割った余りを確かめていくのは根気の要る作業である。そこで, (1) の計算結果と 10 倍することにより小数点が 1 つずれることがヒントになっている。