

数チャレ 第284回(2024年9月)

$2^a 3^b + 2^c 3^d = 2025$ を満たす非負整数の組 (a, b, c, d) を求めよ。

解答

2025 は奇数であるから、

$$a = 0 \text{ または } c = 0$$

$3^6 < 2025 < 3^7$ より

$$2025 - 3^6 = 1296 = 2^4 \times 3^4$$

$$2025 - 3^5 = 1782 = 2 \times 3^4 \times 11$$

$$2025 - 3^4 = 1944 = 2^3 \times 3^5$$

$$2025 - 3^3 = 1998 = 2 \times 3^3 \times 37$$

$$2025 - 3^2 = 2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$$

$$2025 - 3 = 2022 = 2 \times 3 \times 337$$

$$2025 - 1 = 2024 = 2^3 \times 11 \times 23$$

の場合だけ調べればよいから、

$$2025 = 2^4 \times 3^4 + 2^2 \times 3^6 = 2^3 \times 3^5 + 2^0 \times 3^4$$

ですべての場合が尽くされ、

$$(a, b, c, d) = (4, 4, 0, 6), (0, 6, 4, 4), (3, 5, 0, 4), (0, 4, 3, 5)$$

(答)

(注)

1° $2025 = 3^4 \times 5^2$

と素因数分解されるから、本問は

$$2^a 3^{b-4} + 2^c 3^{d-4} = 25$$

に帰着できるのではないかと予想されるが、和が混ざっているためにその場合ですべてであるとは言い切れない。

2° 2022 年の一橋大学で

$$2^a 3^b + 2^c d^d = 2022$$

が出題されたが、この場合は a, b と c, d の順序の違いを除いて一意に定まってしまふ。一般には一意性は成り立たないという反例として、本問を出題した。