

数チャレ 第285回(2024年10月)

$\frac{n}{9} < k < \frac{2n}{17}$ を満たす整数 k がちょうど 3 個あるような自然数 n の最小値を求めよ。

解答

3 個の整数 $K, K+1, K+2$ が不等式

$$\frac{n}{9} < k < \frac{2n}{17} \quad \dots\dots ①$$

を満たす整数 k であるとすれば,

$$\begin{aligned} \frac{n}{9} < K \text{ かつ } K+2 < \frac{2n}{17} \\ \therefore \frac{17K+34}{2} < n < 9K \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

n も $9K$ も自然数であるから, 自然数 n の存在条件として

$$\frac{17K+34}{2} < 9K-1$$

が必要であり,

$$K > 36$$

最小の $K=37$ のときの自然数 n を求めると,

$$\frac{17 \times 37 + 34}{2} = \frac{663}{2} = 331 + \frac{1}{2} < n < 333$$

より

$$n = 332$$

このとき, ②を満たす (①を満たす整数 k が 3 個以上ある) 自然数 n の最小値となるが,

$$\frac{n}{9} = \frac{332}{9} = 36 + \frac{8}{9}, \quad \frac{2n}{17} = \frac{664}{17} = 39 + \frac{16}{17}$$

より ①を満たす整数 k はちょうど 3 個であるから,

条件を満たす自然数 n の最小値は 332 (答)

である。

(別解)

$$\frac{n}{9} < k < \frac{2n}{17} \quad \dots\dots ①$$

を書き換えると,

$$9k - n > 0 \text{ かつ } 2n - 17k > 0$$

となることを考えて,

$$x = 9k - n, \quad y = 2n - 17k \quad \dots\dots ③$$

とおき, k を消去すると

$$17x + 9y = n \quad \dots\dots ④$$

題意は, ④を満たす正の整数の組 (x, y) がちょうど 3 組存在するような自然数 n

の最小値を求めることである。③を考えて、正の整数の組

$$(a-9, b+17), (a, b), (a+9, b-17)$$

が④を満たすとすれば、すべて正であることより

$$a-9 \geq 1 \text{ かつ } b-17 \geq 1 \quad \therefore a \geq 10, b \geq 18$$

④より

$$n \geq 17 \times 10 + 9 \times 18 = 332$$

であり、 $n = 332$ のとき④の正の整数解は

$$(1, 35), (10, 18), (19, 17)$$

の3組だけである。よって、

条件を満たす自然数 n の最小値は 332 (答)

である。

(注) 3 個の整数 k が①を満たすというのは、①を満たす整数 k が 3 個以上ということなので、そこから得られた $n \geq 332$ は必要条件にすぎず、それだけでは求める最小値が $n = 332$ ということにはならない。 $n \geq 332$ の中で①を満たす整数 k がちょうど 3 個となるかどうかを吟味しなければならない。