

数チャレ 第286回(2024年11月)

$\sum_{k=1}^n k^m = 2025$ を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。

解答

- $m = 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) = 2025 \quad \therefore n(n+1) = 4050$$

$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$, $63^2 = 3969 < 4050 < 4096 = 64^2$ より, このような自然数 n があるとすれば

$$n = 63$$

に限られるが,

$$63 \times 64 = 4032 \neq 4050$$

であるから, 不適である。

- $m = 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 2025 = 3^4 \times 5^2$$

$$n(n+1)(2n+1) = 2 \times 3^5 \times 5^2$$

$$\therefore 2n(2n+1)(2n+2) = 2^3 \times 3^5 \times 5^2$$

連続する3整数の1つは3の倍数であるから, $2n, 2n+1, 2n+2$ の1つだけが 3^5 で割り切れ, $2n+1$ が奇数であることに注意すると,

$2n(2n+1)(2n+2)$ の最小値は $(3^5 - 1) \times 3^5 \times (3^5 + 1) > 2^3 \times 3^5 \times 5^2$ となって, 不適である。

- $m = 3$ のとき

$$2025 = 45^2 = \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 10\right)^2 = \sum_{k=1}^9 k^3 \quad \therefore n = 9$$

- $m = 4$ のとき

$$1^4 = 1, 2^4 = 16, 3^4 = 81, 4^4 = 256, 5^4 = 625, 6^4 = 1296 \text{ より}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 < 2025 < 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4$$

となるから, 不適である。

- $m = 5$ のとき

$$1^5 = 1, 2^5 = 32, 3^5 = 243, 4^5 = 1024, 5^5 = 3125 \text{ より}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 < 2025 < 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5$$

となるから, 不適である。

- $m = 6$ のとき

$$1^6 = 1, 2^6 = 64, 3^6 = 729, 4^6 = 4096 \text{ より}$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 < 2025 < 1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6$$

となるから, 不適である。

- $m = 7, 8, 9, 10$ のとき

$$1^7 = 1^{10} = 1, \quad 2^{10} = 1024, \quad 3^7 = 2187 \text{ より}$$

$$1^m + 2^m \leq 1^{10} + 2^{10} < 2025 < 1^7 + 2^7 + 3^7 \leq 1^m + 2^m + 3^m$$

となるから，不適である。

- $m \geq 11$ のとき

$$1^m = 1, \quad 2^m \geq 2^{11} = 2048 \text{ より}$$

$$1^m < 2025 < 1^m + 2^m$$

となるから，不敵である。

以上より，求める自然数の組は

$$(m, n) = (3, 9) \quad (\text{答})$$

ですべてである。