

数チャレ 第287回 (2024年12月)

- (1) n を 11 で割り切れない任意の整数とすると、 $n^5 - 1$ または $n^5 + 1$ は 11 で割り切れることを示せ。
- (2) 任意の素数 p に対して、 $p^{10} + 10$ は素数でないことを示せ。

解答

(1) n は 11 で割り切れないから

$$n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5 \pmod{11}$$

のいずれかであるとしてよく、

$$1^5 - 1 = 0$$

$$(-1)^5 + 1 = 0$$

$$2^5 + 1 = 33 = 11 \times 3$$

$$(-2)^5 - 1 = -33 = 11 \times (-3)$$

$$3^5 - 1 = 242 = 11 \times 22$$

$$(-3)^5 + 1 = -242 = 11 \times (-22)$$

$$4^5 - 1 = 1023 = 11 \times 93$$

$$(-4)^5 + 1 = -1023 = 11 \times (-93)$$

$$5^5 - 1 = 3124 = 11 \times 284$$

$$(-5)^5 + 1 = -3124 = 11 \times (-284)$$

より、 $n^5 - 1$ または $n^5 + 1$ は 11 で割り切れる。

(証明おわり)

(2) $p = 11$ のとき、

$$11^{10} + 10 = 121^5 + 10 = (7 \times 17 + 2)^5 + 10$$

$$\equiv 2^5 + 10 \equiv 42 \equiv 0 \pmod{7}$$

より、 $11^{10} + 10$ は 7 より大きい 7 の倍数であるから素数ではない。

p が 11 でない素数であるとき、(1) より

$$p^5 - 1 \text{ または } p^5 + 1 \text{ は } 11 \text{ で割り切れる。}$$

よって、

$$p^{10} + 10 = (p^5 - 1)(p^5 + 1) + 11$$

は 11 より大きい 11 の倍数であるから素数ではない。

ゆえに、任意の素数 p に対して、 $p^{10} + 10$ は素数ではない。

(証明おわり)