

数チャレ 第288回(2025年1月)

- (1) m, n を自然数とする。 $m^2 + n^2$ が3で割り切れるとき, m, n がともに3で割り切れることを示せ。
- (2) $m^2 + n^2 = 2025$, $m < n$ を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。

解答

- (1) 3で割った余りは0, 1, 2のいずれかであり, m, n を3で割った余りに対して $m^2 + n^2$ を3で割った余りは

m	0	0	0	1	1	1	2	2	2
n	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$m^2 + n^2$	0	1	1	1	2	2	1	2	2

ですべての場合が尽くされる。

$$2025 = 3 \times 695$$

は3で割り切れるから, $m^2 + n^2 = 2025$ を満たすとき, m, n はともに3で割り切れる場合以外はあり得ない。(証明おわり)

- (2) $m^2 + n^2 = 2025$ を満たすとき, (1)より

$$\frac{m}{3}, \frac{n}{3} \text{ はともに自然数}$$

であり,

$$\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 = 225$$

が成り立つ。このとき, 225は3で割り切れるから, (1)と同様にして $\frac{m}{3}, \frac{n}{3}$ も3で割り切れる自然数である。結局 m, n はともに9で割り切れることとなって,

$$m = 9a, \quad n = 9b \quad (a, b \text{ は自然数})$$

と表されるから,

$$a^2 + b^2 = 25$$

を満たす自然数 a, b を探すことになる。 $m < n$ より

$$a < b$$

であるから

$$(a, b) = (3, 4)$$

に限られ, $m^2 + n^2 = 2025$, $m < n$ を満たす自然数の組は

$$(m, n) = (27, 36) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

- (注) (2)では自然数 m, n が存在するという前提のもとで話を進めているので, 途中で矛盾が生じて, 「題意を満たす自然数は存在しない」という結論にもなり得る。例えば, $m^2 + n^2 = 27$ であれば自然数解は存在しない。