

数チャレ 第289回(2025年2月)

次の問に答えよ。

(1) 不等式 $|3x + 2| < x^2 + x + 1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $\frac{3n+2}{n^2+n+1}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ。

出典：2015年 学習院大学 文学部

解答

$$(1) \quad |3x + 2| < x^2 + x + 1 \text{ は} \\ - (x^2 + x + 1) < 3x + 2 < x^2 + x + 1$$

と同値である。左の不等式を解くと、

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3) > 0 \\ \therefore x < -3 \text{ または } x > -1 \quad \dots\dots ①$$

右の不等式を解くと、

$$x^2 - 2x - 1 > 0 \\ \therefore x < 1 - \sqrt{2} \text{ または } x > 1 + \sqrt{2} \quad \dots\dots ②$$

①かつ②より

$$x < -3 \text{ または } -1 < x < 1 - \sqrt{2} \text{ または } x > 1 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(2) $3n + 2 = 0$ となる整数 n は存在しないから、整数になるとすれば

$$\left| \frac{3n+2}{n^2+n+1} \right| \geq 1 \text{ が必要}$$

であり、 $n^2 + n + 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ より

$$|3n + 2| \geq n^2 + n + 1 (> 0)$$

(1)より

$$-3 \leq n \leq -1 \text{ または } 1 - \sqrt{2} \leq n \leq 1 + \sqrt{2}$$

n は整数であるから、

$$n = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

$\frac{3n+2}{n^2+n+1}$ が実際に整数になるかを調べて、

$$\frac{3 \times (-3) + 2}{(-3)^2 + (-3) + 1} = -1 \\ \frac{3 \times (-2) + 2}{(-2)^2 + (-2) + 1} = -\frac{4}{3} \\ \frac{3 \times (-1) + 2}{(-1)^2 + (-1) + 1} = -1$$

$$\frac{3 \times 0 + 2}{0^2 + 0 + 1} = 2$$

$$\frac{3 \times 1 + 2}{1^2 + 1 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{3 \times 2 + 2}{2^2 + 2 + 1} = \frac{8}{7}$$

より

$$n = -3, -1, 0 \quad (\text{答})$$