

数チャレ 第290回 (2025年3月)

自然数 n, p に対して, n^p の 1 の位の数を $f_p(n)$ で表す。次の問に答えよ。

- (1) $f_2(n)$ の取りうる値を全て求めよ。
- (2) $f_5(n) - f_1(n)$ の値を求めよ。
- (3) $f_{100}(n)$ の取りうる値を全て求めよ。

出典：2025年 早稲田大学 社会科学部

解答

- (1) 任意の整数は, 10 を法として $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5$ のいずれかと合同であり,

$$0^2 = 0, (\pm 1)^2 = 1, (\pm 2)^2 = 4, (\pm 3)^2 = 9, \\ (\pm 4)^2 \equiv 6, 5^2 \equiv 5 \pmod{10}$$

であるから, $f_2(n)$ の取りうる値は

$$0, 1, 4, 5, 6, 9 \quad (\text{答})$$

(2)
$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4 + 5) \\ &= (n + 2)(n + 1)n(n - 1)(n - 2) + 5n(n^2 - 1) \end{aligned}$$

は 5 の倍数であり, n と $n^2 - 1$ の偶奇は異なるから 2 の倍数でもある。5 と 2 は互いに素であるから, $n^5 - n$ は 10 の倍数であり,

$$f_5(n) - f_1(n) = 0 \quad (\text{答})$$

- (3) (2)より

$$\begin{aligned} n^{100} &= (n^{20})^5 \\ &= (n^{20})^5 - n^{20} + n^{20} \\ &= (n^{20})^5 - n^{20} + (n^4)^5 - n^4 + n^4 \end{aligned}$$

の 1 の位は $n^4 = (n^2)^2$ の 1 の位と等しい。(1)も参考にして,

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 4^2 \equiv 6^2 \equiv 6, 5^2 \equiv 5, 9^2 \equiv 1 \pmod{10}$$

より, $f_{100}(n) = f_4(n)$ の取りうる値は

$$0, 1, 5, 6 \quad (\text{答})$$