

数チャレ 第294回 (2025年7月)

自然数 n に対して, $a(n) = n^2 + 2$, $b(n) = n^3 + 45n^2 + 2n + 765$ とおき, $a(n)$ と $b(n)$ の最大公約数を $d(n)$ とおく。以下の間に答えよ。

- (1) $a(n)$ が 5 の倍数でないことを示せ。
- (2) n が自然数全体を動くときの $d(n)$ の最大値 d_0 を求めよ。また, $d(n) = d_0$ となる自然数 n のなかで最小のものを求めよ。
- (3) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a(n) + \log_9 b(n) + (m-1) \log_{\frac{1}{3}} 5$ が自然数となる自然数の組 (m, n) がただ 1 つ存在することを示せ。

出典：2025 年 群馬大学