

数チャレ 第298回(2025年11月)

整数 m, n を用いて $1463m + 1309n$ と表される正の数のうち最小のものを d とする。

- (1) 任意の整数 x, y に対して, $1463x + 1309y$ は d の倍数であることを示せ。
- (2) d の値を求めよ。
- (3) 方程式 $1463x + 1309y = d$ の整数解 (x, y) を求めよ。

解答

- (1) 任意の整数 x, y に対して, $1463x + 1309y$ を d で割ると,

$$1463x + 1309y = dq + r \quad (0 \leq r < d) \quad \dots\dots ①$$

を満たす整数 q, r が一意に定まる。

$$1463x_1 + 1309y_1 = d \quad \dots\dots ②$$

を満たす整数 x_1, y_1 が存在するから, ②を①に代入して

$$1463(x - x_1q) + 1309(y - y_1q) = r$$

d の最小性と $0 \leq r < d$ より

$$r = 0$$

となるから,

$$1463x + 1309y = dq$$

したがって, $1463x + 1309y$ は d の倍数である。 (証明おわり)

- (2) (1)で示したことより, 特に

$$1463 = 1463 \times 1 + 1309 \times 0 = dq_1$$

$$1309 = 1463 \times 0 + 1309 \times 1 = dq_2$$

を満たす整数 q_1, q_2 が存在するから, d は 1463 と 1309 の公約数である。②より, 1463 と 1309 の任意の公約数は d の約数であるから,

d は 1463 と 1309 の最大公約数

である。

$$1463 = 1309 \times 1 + 154$$

$$1309 = 154 \times 8 + 77$$

$$154 = 77 \times 2 + 0$$

より,

$$d = \gcd(1463, 1309) = \gcd(1309, 154) = \gcd(154, 77) = 77 \quad (\text{答})$$

- (3) 方程式 $1463x + 1309y = d$ は, 両辺を $d = 77$ で割ることにより

$$19x + 17y = 1 \quad \dots\dots ③$$

と同値である。 $19 = (19 - 17) \times 9 + 1$ より

$$19 \times (-8) + 17 \times 9 = 1 \quad \dots\dots ④$$

であるから, ③ - ④ より

$$19(x + 8) + 17(y - 9) = 0$$

$$\therefore 19(x+8) = 17(9-y)$$

19 と 17 は互いに素であるから ,

$$x+8 = 17n, \quad 9-y = 19n$$

を満たす整数 n が存在し , 方程式 $1463x + 1309y = d$ の整数解は

$$(x, y) = (17n - 8, -19n + 9) \quad (n \text{ は整数}) \quad (\text{答})$$