

[I]

(1) ある年の高校 3 年生女子の身長を X (cm) とするとき, 確率変数 $Z = \frac{X - 158}{5}$ は正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$153 \leq X \leq 170.5 \iff -1.00 \leq Z \leq 2.50$$

であるから,

$$\begin{aligned} P(153 \leq X \leq 170.5) &= p(1.00) + p(2.50) \\ &= 0.3413 + 0.4938 \\ &= 0.8351 \end{aligned}$$

よって, 身長 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は 83.51 % いることになり, 小数第 1 位を四捨五入すると約 84 % である。

(あ)

$$Z = \frac{X - 158}{5} \leq -2.00 \iff X \leq 148$$

$$P(X \leq 148) = 0.5 - p(2.00) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

$$Z = \frac{X - 158}{5} \leq -1.80 \iff X \leq 149$$

$$P(X \leq 149) = 0.5 - p(1.80) = 0.5 - 0.4641 = 0.0359$$

であるから, 身長が 148 cm 以下の生徒は低い方から 2.28 % いて 2.5 % 以内である

(い)

が, 149 cm 以下の生徒は低い方から 3.59 % いて 2.5 % 以内ではない。

(2) $f(x) = rx \log x$ ($1 \leq x \leq e$) は確率密度関数であるから

$$\int_1^e f(x) dx = 1$$

であり, 定積分を計算すると

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \left[\frac{r}{2} x^2 \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{r}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} r e^2 - \frac{r}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{4} r e^2 + \frac{1}{4} r \end{aligned}$$

となるから,

$$r = \left[\frac{4}{e^2 + 1} \right] \quad (\text{う})$$

(3) 区分求積法により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^3 \frac{k\pi}{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n} \sin^3 \frac{k\pi}{2n} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 1)(\cos x)' dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= \boxed{\frac{4}{3\pi}} \quad (\text{え})
\end{aligned}$$

(注) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ の計算は, 3 倍角の公式

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - \sin 3x) dx \\
&= \frac{1}{4} \left[-3 \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \times \left(3 - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

としてもよい。

$$\begin{aligned}
(4) \quad 12(1 + \sqrt{3}i) &= 24 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
&= 24 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
&= \left\{ 2\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \right\}^3
\end{aligned}$$

α, β, γ は半径 $2\sqrt[3]{3}$ の円周上にある 3 等分点であるから, $\triangle ABC$ は半径 $2\sqrt[3]{3}$ の円に内接する正三角形である。正三角形 ABC の一辺の長さを x とすると, 正弦定理より

$$\frac{x}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 2\sqrt[3]{3} \quad \therefore x = 3^{\frac{1}{2}} \times 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2 \cdot 3^{\frac{5}{6}}$$

よって, 正三角形 ABC の面積は

$$3^s = \frac{1}{2} \times \left(2 \cdot 3^{\frac{5}{6}} \right)^2 \times \sin \frac{\pi}{3}$$

であり, s の値は

$$s = \frac{5}{6} \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{10+3}{6} = \boxed{\frac{13}{6}} \quad (\text{お})$$

である。

$$(5) \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2} \text{ より}$$

$$a\sqrt{2}+b = 2\sqrt{2}(c\sqrt{2}+d)$$

$$(a-2d)\sqrt{2}+b-4c=0$$

$a-2d, b-4c$ は整数(有理数)であり, $\sqrt{2}$ は無理数であるから,

$$a-2d=0 \text{ かつ } b-4c=0 \quad \therefore a=2d, b=4c$$

$$ad+bc=18 \text{ より}$$

$$2d \cdot d + 4c \cdot c = 18 \quad \therefore 2c^2 + d^2 = 9$$

c は整数であり, $c^2 \leq \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$ より $c^2 = 0, 1, 2$ に限られることに注意すると,

$2c^2 + d^2 = 9$ を満たすのは

$$(c^2, d^2) = (0, 9), (4, 1)$$

のみであることがわかり, $a = 2d \geq 0, b = 4c \geq 0$ より $c \geq 0, d \geq 0$ であるから

$$(c, d) = (0, 3), (2, 1)$$

$$\therefore (a, b, c, d) = (6, 0, 0, 3), (2, 8, 2, 1) \quad (\text{答})$$

[II]

(1) 赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めたとき, 操作 T の後で袋の中に白玉が 3 個入っているのは, 一度も白玉を取り出されなかった場合であるから,

$$a_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}} a_n$$

(あ)

$\{a_n\}$ は初項 $a_0 = 1$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから, 一般項は

$$a_n = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \dots\dots ①$$

(か)

操作 T を $n+1$ 回行なった後に, 袋の中の白玉が 2 個であるのは,

- n 回の操作後に白玉が 3 個で, 次に白玉を取り出す
- n 回の操作後に白玉が 2 個で, 次に赤玉を取り出す

のいずれかの場合であるから,

$$b_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}} a_n + \boxed{\frac{3}{5}} b_n \dots\dots ②$$

(い) (う)

同様に考えて,

$$c_{n+1} = \boxed{\frac{2}{5}} b_n + \boxed{\frac{3}{4}} c_n \dots\dots ③$$

(え) (お)

①, ② より

$$b_{n+1} = \frac{3}{5} b_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \dots\dots ④$$

ここで, $\beta \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{5} \cdot \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (β は定数) とおくと,

$$-\frac{1}{10} \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$-\frac{1}{5} \beta = 1 \quad \therefore \beta = -5$$

$$\therefore -5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{5} \cdot (-5) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \dots\dots ⑤$$

④ - ⑤ より

$$b_{n+1} + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{5} \left\{ b_n + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$\left\{ b_n + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$ は初項 $b_0 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 5$, 公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列であるから,

$$b_n + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad \therefore b_n = \boxed{5} \left\{ \boxed{\left(\frac{3}{5}\right)^n} - \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \right\}$$

(き) (く) (け)

これを ③ に代入して

$$c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + 2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad \dots\dots ⑥$$

$x\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + y\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{4}\left\{x\left(\frac{3}{5}\right)^n + y\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} + 2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (x, y は定数) とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x &= \frac{3}{4}x + 2 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}y - 2 & \therefore x &= -\frac{40}{3}, y = 8 \\ \therefore -\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{3}{4}\left\{-\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} + 2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &\dots\dots ⑦ \end{aligned}$$

⑥ - ⑦ より

$c_{n+1} + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{4}\left\{c_n + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$
 $\left\{c_n + 8\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ は初項 $c_1 + 8\left(\frac{3}{5}\right)^0 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 + 8 - 4 = 4$, 公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから,

$$\begin{aligned} c_n + 8\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ \therefore c_n &= \boxed{4}_{(\text{ニ})} \left\{ \left(\boxed{\frac{3}{4}}_{(\text{サ})}\right)^{n-1} + \boxed{-2}_{(\text{シ})} \left(\boxed{\frac{3}{5}}_{(\text{ス})}\right)^{n-1} + \left(\boxed{\frac{1}{2}}_{(\text{セ})}\right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

(2) $a_0 = 1$ と考えて, $0 \leq k \leq n-1$ のとき

$$P(X_n = k) = a_k - a_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

であり,

$$P(X_n = n) = a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

であるから, $Y_n = 2^{X_n}$ の期待値は

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2}n + 1}_{(\text{ト})}$$

である。さらに,

$$\begin{aligned} E(Y_n^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 2^{2n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1} + 2^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2^n = \frac{3 \cdot 2^n - 1}{2} \end{aligned}$$

であるから, Y_n の分散は

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= E(Y_n^2) - \{E(Y_n)\}^2 \\ &= \frac{3 \cdot 2^n - 1}{2} - \left(\frac{1}{4} n^2 + n + 1 \right) \\ &= \boxed{3}_{(\text{㌦)} } 2^{n-1} + \boxed{-\frac{1}{4}}_{(\text{㌥)} } n^2 + \boxed{-1}_{(\text{㌦)} } n + \boxed{-\frac{3}{2}}_{(\text{㌧)} } \end{aligned}$$

[Ⅲ]

$$\begin{aligned}
 (1)(i) \quad P(Q(x)) &= P(2x^2 + 1) \\
 &= 3(2x^2 + 1)^3 - 9(2x^2 + 1)^2 + 7(2x^2 + 1) \\
 &= 3(8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1) - 9(4x^4 + 4x^2 + 1) + 7(2x^2 + 1) \\
 &= \boxed{24x^6 - 4x^2 + 1} \quad (\text{あ})
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad G(H(x)) = a_m H(x)^m + a_{m-1} H(x)^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

であるとすれば, mn 次の係数を比べて

$$a_m b_n^m = 0$$

が得られ, $b_n^m \neq 0$ であるから

$$a_m = 0$$

$a_m = \cdots = a_{m-k} = 0 \quad (0 \leq k \leq m-1)$ であるとすれば,

$$G(H(x)) = a_{m-k-1} H(x)^{m-k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

であり, $x^{n(m-k-1)}$ の係数を比べると

$$a_{m-k-1} b_n^{m-k-1} = 0$$

$b_n^{m-k-1} \neq 0$ より

$$a_{m-k-1} = 0$$

数学的帰納法(の論理)により,

$$a_m = a_{m-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

であることが示された。

(おわり)

$$(2)(i) \quad g(x) + h(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = g(1) = \boxed{a} \quad (\text{い})$$

0 でない多項式 $f(x)$ の次数を $n (\geq 0)$ とすると

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad h(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad \text{の次数はいずれも } n+1$$

$$g(h(x)) \text{ の次数は } (n+1)^2$$

$$\{h(x)\}^3 \text{ の次数は } 3(n+1)$$

$$\{g(x)\}^2 \text{ の次数は } 2(n+1)$$

であるから,

$$g(h(x)) = \{h(x)\}^3 + b\{g(x)\}^2 + ch(x) + d \quad (b, c, d \text{ は定数})$$

において次数を比べると

$$(n+1)^2 = 3(n+1) \quad \therefore n+1 = \boxed{3} \quad (\text{う})$$

$g(x) + h(x) = a$ より

$$\begin{aligned}
 g(h(x)) &= \{h(x)\}^3 + b\{a - h(x)\}^2 + ch(x) + d \\
 &= \{h(x)\}^3 + b\{h(x)\}^2 + (c - 2ab)h(x) + a^2b + d
 \end{aligned}$$

であるから, (1)(ii) より

$$g(x) = x^3 + bx^2 + (c - 2ab)x + a^2b + d$$

が成り立つ。 $x = 0, 1$ を代入して

$$g(0) = a^2b + d = 0$$

..... ①

$$g(1) = 1 + b + (c - 2ab) + 0 = a$$

$$\therefore c = (2a - 1)b + a - 1 \quad \dots\dots ②$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ を微分して}$$

$$g'(x) = f(x) = 3x^2 + 2bx + (c - 2ab)$$

$x = 1$ を代入すると

$$f(1) = 3 + 2b + (c - 2ab) = 2(1 - a)$$

$$\therefore c = (2a - 2)b - 2a - 1 \quad \dots\dots ③$$

②かつ③より

$$(2a - 1)b + a - 1 = (2a - 2)b - 2a - 1 \quad \therefore b = \boxed{-3a} \text{ (え)}$$

②に代入して

$$c = -3a(2a - 1) + a - 1 = \boxed{-6a^2 + 4a - 1} \text{ (お)}$$

①に代入して

$$d = -a^2b = \boxed{3a^3} \text{ (か)}$$

$$(ii) \quad g'(x) = 3x^2 - 6ax - 6a^2 + 4a - 1 - 2a(-3a)$$

$$= 3x^2 - 6ax + 4a - 1$$

$$= 3(x - a)^2 - (3a^2 - 4a + 1)$$

$$= 3(x - a)^2 - (a - 1)(3a - 1)$$

$g(x)$ が極値をもつための条件は $g'(x)$ が符号変化を起こすことであり、

$$-(a - 1)(3a - 1) < 0 \quad \therefore a < \boxed{\frac{1}{3}} \text{ または } a > \boxed{\frac{1}{3}} \text{ (き)}$$

a がこの条件を満たすとき

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \left\{ (x - a)^2 - \frac{3a^2 - 4a + 1}{3} \right\} \\ &= 3 \left(x - a + \frac{\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3} \right) \left(x - a - \frac{\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3} \right) \end{aligned}$$

と因数分解され、 $g'(x)$ が + から - へ変わるときを求め、 $g(x)$ が極大となる x は

$$x = \boxed{a - \frac{\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3}} \text{ (け)}$$

$$\alpha = a - \frac{\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3}, \quad \beta = a + \frac{\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} g(x) - M &= x^3 - 3ax^2 + 3\alpha\beta x - M \\ &= (x - \alpha)^2(x - \gamma) \quad (\gamma \text{ は定数}) \end{aligned}$$

と因数分解され、このとき

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{M}{\alpha^2} = \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} \\ &= \alpha - 3a + 3\beta \\ &= a - \frac{\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3} - 3a + 3 \left(a + \frac{\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3} \right) \end{aligned}$$

$$= \boxed{a + \frac{2\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3}} \quad (\text{㉔})$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad g'(a) &= -3a^2 + 4a - 1 \\ g(a) &= a^3 - 3a \cdot a^2 + (4a - 1)a = -2a^3 + 4a^2 - a \end{aligned}$$

曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ における接線の方程式は

$$y = (-3a^2 + 4a - 1)(x - a) - 2a^3 + 4a^2 - a$$

$$\therefore y = \left(\boxed{-3a^2 + 4a - 1} \right) x + \boxed{a^3} \quad \begin{matrix} (\text{㉕}) & (\text{㉖}) \end{matrix}$$

定積分 $F(a)$ を計算すると

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^a \{x^3 - 3ax^2 + (4a - 1)x - (-3a^2 + 4a - 1)x - a^3 - 2(x - a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\ &= \int_0^a \{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - 2(x - a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\ &= \int_0^a \{(x - a)^3 - 2(x - a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\ &= \int_{-a}^0 (x^3 - 2x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{-a} (x^2 - 2) e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{x^2}{2}\right)' dx \\ &= \left[(x^2 - 2) e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{-a} - \int_0^{-a} 2x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= (a^2 - 2) e^{-\frac{a^2}{2}} + 2 + 2 \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{-a} \\ &= \boxed{a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}} \quad (\text{㉗}) \end{aligned}$$

$a^2 = t$ とおくと

$$F(a) = t e^{-\frac{t}{2}} \quad (t \geq 0)$$

これを $G(t)$ とおくと,

$$G'(t) = 1 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + t \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\right) = \frac{2-t}{2} e^{-\frac{t}{2}}$$

$t > 0$ において

$$G'(t) > 0 \iff 2 - t > 0 \iff 0 < t < 2$$

であるから, $G(t)$ の増減は

t	0	2	(∞)
$G'(t)$	+	0	-
$G(t)$	0	↗ 極大 ↘	(0)

よって, $F(a) = G(t)$ ($t \geq 0$) の最大値は

$$G(2) = \boxed{\frac{2}{e}} \quad (\text{㉘})$$

[IV]

(1) $0^\circ < \angle P_0 P_1 A_1 < 90^\circ$ より $A_1(0, 1)$, $B_1(1, 1)$ である。 $\angle P_0 P_1 A_1 = \angle P_2 P_1 B_1$ より
 $\triangle P_0 A_1 P_1 \quad \triangle P_2 B_1 P_1$

であるから,

$$\begin{aligned} 1 : p_1 &= (1 - q_2) : (1 - p_1) \\ 1 - p_1 &= p_1(1 - q_2) \quad \therefore p_1(2 - q_2) = 1 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

また, $A_2(1, 1)$, $B_2(1, 0)$ であるから, $\angle P_1 P_2 A_2 = \angle P_3 P_2 B_2$ より

$$\triangle P_1 A_2 P_2 \quad \triangle P_3 B_2 P_2$$

であり,

$$(1 - q_2) : (1 - p_1) = q_2 : (1 - p) \quad \dots\dots ②$$

①かつ②より

$$\begin{aligned} 1 : p_1 &= q_2 : (1 - p) \\ \therefore p_1 q_2 &= 1 - p \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

①に③を代入して

$$2p_1 - (1 - p) = 1 \quad \therefore p_1 = \boxed{\frac{2-p}{2}} \quad (\text{あ})$$

このとき

$$q_2 = \frac{1-p}{p_1} = \boxed{\frac{2-2p}{2-p}} \quad (\text{い})$$

$P_4(0, q_4)$ ($0 < q_4 \leq 1$) のとき, $\angle P_4 P_3 O = \angle P_2 P_3 B_2$ ($O=B_3$, $B_2=A_3$) より

$$\begin{aligned} p : q_4 &= (1 - p) : q_2 \\ q_4(1 - p) &= p q_2 = \frac{2p(1-p)}{2-p} \quad \therefore q_4 = \boxed{\frac{2p}{2-p}} \quad (\text{え}) \end{aligned}$$

$$\frac{2p}{2-p} \leq 1 \quad (0 < p < 1) \text{ より}$$

$$2p \leq 2 - p \quad \therefore 0 < p \leq \boxed{\frac{2}{3}} \quad (\text{う})$$

$$\frac{2}{3} \leq p < 1 \text{ のとき,}$$

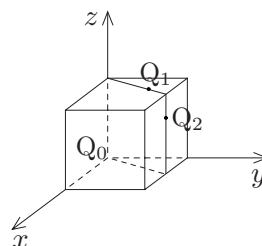
$$P_4(p_4, 1) \quad (0 \leq p_4 < p)$$

であり, $\angle P_4 P_3 O = \angle P_2 P_3 B_2$ より

$$\begin{aligned} (p - p_4) : 1 &= (1 - p) : q_2 \\ p - p_4 &= \frac{1-p}{q_2} = p_1 = \frac{2-p}{2} \quad \therefore p_4 = p - \frac{2-p}{2} = \boxed{\frac{3p-2}{2}} \quad (\text{お}) \end{aligned}$$

(2)(i) 点 Q_1 を含む立方体 T は平面 $z=1$ 上にあり,
 平面 $Q_0 Q_1 Q_2$ は平面 $z=1$ と垂直である。よって,
 平面 $Q_0 Q_1 Q_2$ の方程式は

$$y = \frac{b_1}{a_1} x$$



であり, 直線 $y = \frac{b_1}{a_1}x$, $z = 0$ と平面 $y = 1$ との交点は

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, 1, 0 \right)$$

(カ)

であるから,

$$a_2 = \frac{a_1}{b_1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。

- (ii) $0^\circ < \angle Q_0 Q_1 C_1 < 90^\circ$ より $C_1(0, 0, 1)$, $D_1(a_2, 1, 1)$ であり,
 $\angle Q_0 Q_1 C_1 = \angle Q_2 Q_1 D_1$ より $\triangle Q_0 C_1 Q_1 \sim \triangle Q_2 D_1 Q_1$ であるから,
 $1 : \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = (1 - c_2) : (\sqrt{a_2^2 + 1} - \sqrt{a_1^2 + b_1^2})$
 $\sqrt{a_2^2 + 1} - \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = (1 - c_2)\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

①より

$$\sqrt{a_2^2 + 1} = \sqrt{\frac{a_1^2}{b_1^2} + 1} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{b_1}$$

であるから,

$$\frac{1}{b_1} - 1 = 1 - c_2 \quad \therefore c_2 = 2 - \frac{1}{b_1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

点 Q_2 を含む立方体 T の面は平面 $y = 1$ 上にあり,
 平面 $Q_1 Q_2 Q_3$ は平面 $y = 1$ と垂直であるから, 平面
 $Q_1 Q_2 Q_3$ の方程式は

$$z = \frac{1}{a_1 - a}(x - a)$$

$Q_2(a_2, 1, c_2)$ はこの平面上にあるから,

$$c_2 = \frac{1}{a_1 - a}(a_2 - a) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\angle Q_1 Q_2 C_2 = \angle Q_3 Q_2 D_2$ より $\triangle Q_1 C_2 Q_2 \sim \triangle Q_3 D_2 Q_2$ であるから,

$$(1 - b_1) : \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (c_2 - 1)^2} = (1 - b) : \sqrt{(a_2 - a)^2 + c_2^2}$$

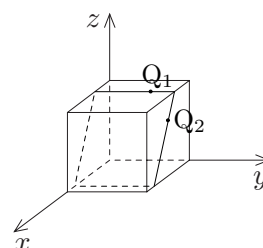
ここで, ③より

$$\begin{aligned} (a_2 - a_1)^2 + (c_2 - 1)^2 &= (a_2 - a_1)^2 + \left(\frac{a_2 - a - a_1 + a}{a_1 - a} \right)^2 \\ &= (a_2 - a_1)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(a_1 - a)^2} \right\} \\ (a_2 - a)^2 + c_2^2 &= (a - a_2)^2 + \left(\frac{a_2 - a}{a_1 - a} \right)^2 = (a - a_2)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(a_1 - a)^2} \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$(1 - b_1) : |a_2 - a_1| = (1 - b) : |a - a_2|$$

と書ける。さらに, (i) の考察より $a_1 < a_2$ であるから, $a_1 < a_2 < a$ であり,



$$(1-b_1):(a_2-a_1)=(1-b):(a-a_2)$$

$$\therefore (1-b)(a_2-a_1)=(1-b_1)(a-a_2) \quad \dots\dots ④$$

③に①を代入して

$$c_2 = \frac{1}{a_1-a} \left(\frac{a_1}{b_1} - a \right) = \frac{a_1-ab_1}{b_1(a_1-a)}$$

ここに②を適用すると

$$2b_1-1 = \frac{a_1-ab_1}{a_1-a}$$

$$(a_1-a)(2b_1-1) = a_1-ab_1$$

$$(2a_1-a)b_1 = 2a_1-a \quad \therefore (2a_1-a)(b_1-1) = 0$$

$b_1 \neq 1$ より

$$2a_1-a=0 \quad \therefore a_1 = \boxed{\frac{a}{2}} \quad \dots\dots ⑤$$

(き)

④に①, ⑤を代入して

$$(1-b) \left(\frac{a}{2b_1} - \frac{a}{2} \right) = (1-b_1) \left(a - \frac{a}{2b_1} \right)$$

$$(1-b) \cdot \frac{a}{2b_1} (1-b_1) = (1-b_1) \cdot \frac{a}{2b_1} (2b_1-1)$$

$$1-b = 2b_1-1 \quad \therefore b_1 = \boxed{\frac{2-b}{2}} \quad (<)$$

①に代入して

$$a_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{b-2} = \boxed{\frac{a}{2-b}} \quad (\text{け})$$

②に代入して

$$c_2 = 2 - \frac{2}{2-b} = \boxed{\frac{2-2b}{2-b}} \quad (\text{こ})$$

点 Q_3 を含む立方体 T の面は xy 平面 ($z=0$) 上にあり, 平面 $Q_2Q_3Q_4$ は xy 平面と垂直であるから, $Q_4(1, 0, c_4)$ とすると, 平面 $Q_2Q_3Q_4$ の方程式は

$$y = \frac{b}{a-1}(x-1)$$

$Q_2\left(\frac{a}{2-b}, 1, c_2\right)$ がこの平面上にあるから,

$$1 = \frac{b}{a-1} \left(\frac{a}{2-b} - 1 \right)$$

$$(a-1)(2-b) = b(a+b-2)$$

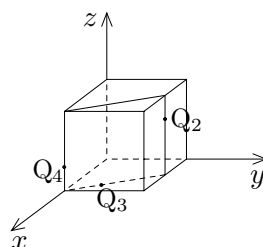
$$b^2 + (2a-3)b - (2a-2) = 0$$

$$(b-1)(b+2a-2) = 0$$

$b \neq 1$ より

$$b = \boxed{2-2a} \quad (\text{し})$$

$\angle Q_2Q_3C_3 = \angle Q_4Q_3D_3$ より



$$C_3Q_2 : C_3Q_3 = D_3Q_4 : D_3Q_3$$

$$c_2 : \sqrt{(a_2 - a)^2 + (1 - b)^2} = c_4 : \sqrt{(a - 1)^2 + b^2}$$

ここで,

$$a_2 = \frac{a}{2 - (2 - 2a)} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{2 - 2(2 - 2a)}{2 - (2 - 2a)} = \frac{2a - 1}{a} > 0$$

$$(a_2 - a)^2 + (1 - b)^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + (2a - 1)^2 = \frac{5}{4}(2a - 1)^2$$

$$(a - 1)^2 + b^2 = (a - 1)^2 + (2 - 2a)^2 = 5(a - 1)^2$$

であるから,

$$\frac{2a - 1}{a} : \frac{2a - 1}{2} = c_4 : (1 - a) \quad \therefore c_4 = \boxed{\frac{2 - 2a}{a}} \text{ (す)}$$

このとき, 点 Q_4 が立方体 T 内にあることより

$$0 \leq c_4 \leq 1 \quad (0 < a < 1)$$

$$0 < a < 1 \text{ かつ } 2 - 2a \leq a \quad \therefore \boxed{\frac{2}{3}} \leq a < 1$$

(き)

$Q_4(a_4, b_4, 1)$ のとき, 点 Q_4 から xy 平面に下ろした垂線の足を $H_4(a_4, b_4, 0)$ とすると, $\angle Q_2Q_3C_3 = \angle Q_4Q_3D_3 = \angle Q_4Q_3H_4$ より $\triangle Q_2C_2Q_3 \cong \triangle Q_4H_4Q_3$ であり, 点 H_4 は C_3Q_3 を $\frac{2 - 2b}{2 - b} + 1 : 1 = (4 - 3b) : (2 - b)$ に外分するから,

$$\begin{aligned} (a_4, b_4, 0) &= \frac{b - 2}{2 - 2b} \left(\frac{a}{2 - b}, 1, 0 \right) + \frac{4 - 3b}{2 - 2b} (a, b, 0) \\ &= \frac{1}{2 - 2b} (-a + a(4 - 3b), b - 2 + b(4 - 3b), 0) \\ &= \frac{1}{2 - 2b} ((3 - 3b)a, -3b^2 + 5b - 2, 0) \\ &= \frac{1}{2(1 - b)} (3(1 - b)a, -(b - 1)(3b - 2), 0) \\ &= \left(\frac{3}{2}a, \frac{3b - 2}{2}, 0 \right) \\ \therefore Q_4 &\left(\boxed{\frac{3}{2}a}, \boxed{\frac{3b - 2}{2}}, 1 \right) \end{aligned}$$

(せ) (そ)

点 $Q_4(a_4, b_4, 1)$ が立方体 T 内にあるための条件は

$$0 < a < 1 \text{ かつ } 0 \leq \frac{3}{2}a \leq 1 \text{ かつ } 0 < b < 1 \text{ かつ } 0 \leq \frac{3b - 2}{2} \leq 1$$

$$\therefore 0 < a \leq \frac{2}{3} \text{ かつ } \frac{2}{3} \leq b < 1$$