［Ｉ］

以下の設問（5）に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

（1） 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，$0 \leqq Z \leqq u$ となる確率を $p(u)$ で表す。いくつかの u の値に対する $p(u)$ の値を以下の表にまとめた。

u	0.67	1.00	1.64	1.80	2.00	2.50
$p(u)$	0.2486	0.3413	0.4495	0.4641	0.4772	0.4938

この表を用いて，身長の分布について考察してみよう。

ある年の高校3年生女子の身長は，平均 158 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うと仮定する。この年の高校3年生女子の中で，身長が 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は約 $\boxed{（あ）}$ %いる。この年の高校3年生女子の中で，身長が低い方から 2.5 % の中に入る生徒の身長は $\boxed{（い）}$ cm 以下である。ただし，空欄（あ）には小数第1位を四捨五入して，整数値を入れ，空欄（い）には当てはまる最も大きい整数値を入れなさい。

（2） 連続型確率変数 X のとりうる値の範囲が $1 \leqq X \leqq e$ であり，その確率密度関数が $f(x) = rx\log x\ (1 \leqq x \leqq e)$ で与えられている。ただし，r は定数であり，e は自然対数の底である。このとき，$r = \boxed{（う）}$ である。

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \boxed{（え）}$ である。

（4） i を虚数単位とし，方程式 $z^3 = 12(1+\sqrt{3}\,i)$ の異なる3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。複素数平面上の3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 3^s と表すと，$s = \boxed{（お）}$ である。ただし，空欄（お）には分数を入れなさい。

（5） $a,\ b,\ c,\ d$ を整数とし，$c \neq 0$ または $d \neq 0$ とする。$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，以下の4条件

$$a \geqq 0, \quad b \geqq 0, \quad \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2}, \quad ad+bc = 18$$

を満たす組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めなさい。ただし，答えだけでなく思考過程も書きなさい。

［Ⅱ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，空欄(か)，(そ)には n の式を入れ，それ以外の空欄には数を入れなさい。

袋が1つ，赤玉3個，白玉3個が用意されている。赤玉が少なくとも1個袋に入った状態に対して，操作Tの手順を以下のように定める。

操作T

> 袋から玉を1個無作為に取り出し，それが赤玉であれば袋に戻し，白玉であれば袋に戻さない。

n を自然数とする。

（1） 赤玉3個と白玉3個が袋に入った状態から始めて，操作Tを n 回施し終えたとき，袋の中に入っている白玉の個数が3個である確率を a_n，2個である確率を b_n，1個である確率を c_n とする。このとき，次の関係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \boxed{\text{(あ)}}\, a_n \\ b_{n+1} = \boxed{\text{(い)}}\, a_n + \boxed{\text{(う)}}\, b_n \\ c_{n+1} = \boxed{\text{(え)}}\, b_n + \boxed{\text{(お)}}\, c_n \end{cases}$$

が成り立つ。これより，a_n，b_n，c_n をそれぞれ n の式で表すと

$$a_n = \boxed{\text{(か)}}$$

$$b_n = \boxed{\text{(き)}}\left\{\left(\boxed{\text{(く)}}\right)^n - \left(\boxed{\text{(け)}}\right)^n\right\}$$

$$c_n = \boxed{\text{(こ)}}\left\{\left(\boxed{\text{(さ)}}\right)^{n-1} + \boxed{\text{(し)}}\left(\boxed{\text{(す)}}\right)^{n-1} + \left(\boxed{\text{(せ)}}\right)^{n-1}\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{(さ)}} > \boxed{\text{(せ)}}$ とする。

（2） 赤玉が少なくとも1個袋に入った状態に対して，ゲームTのルールを以下のように定める。

ゲームT

> 操作Tを1回施し，その結果，白玉が3個袋に入っている場合に限り1点を得る。

赤玉3個と白玉3個が袋に入った状態から始めて，ゲームTを n 回行い終えたとき，1回目から n 回目までに得た点の合計を X_n とし，$Y_n = 2^{X_n}$ と定める。このとき，Y_n の期待値は $\boxed{\text{(そ)}}$ であり，分散は $\boxed{\text{(た)}}\, 2^{n-1} + \boxed{\text{(ち)}}\, n^2 + \boxed{\text{(つ)}}\, n + \boxed{\text{(て)}}$ である。

[Ⅲ]

以下の設問 (1)(ii) に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。以下，すべての多項式は，実数を係数とする x についての多項式であるとする。

(1)(i)　3 次式 $P(x)=3x^3-9x^2+7x$ と 2 次式 $Q(x)=2x^2+1$ について，合成関数 $P(Q(x))$ は多項式 $\boxed{\text{(あ)}}$ で表される。

(ii)　多項式の積の展開より，2 つの多項式 $G(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$ と $H(x)=b_n x^n+\cdots+b_1 x+b_0$ の合成関数 $G(H(x))$ は多項式で表される。n が自然数であって $b_n \neq 0$ であるとき，$G(H(x))=0$ が x についての恒等式ならば，$a_m=\cdots=a_0=0$ となることを示しなさい。

(2)　$f(x)$ を 0 でない多項式とし，

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt, \qquad h(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$$

と定める。さらに，$g(1)$ を a と表し，以下の 2 条件が成り立つとする。

- ある定数 b，c，d が存在して，x についての恒等式
$$g(h(x))-\left(\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d\right)=0$$
が成り立つ。
- 等式 $f(1)=2(1-a)$ が成り立つ。

以下において (う)，(き)，(く)，(せ) には数を入れ，他の空欄は a を用いて表しなさい。

(i)　$g(x)+h(x)=\boxed{\text{(い)}}$ であり，(1)(ii) を用いると，$g(x)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 次式であり，$b=\boxed{\text{(え)}}$，$c=\boxed{\text{(お)}}$，$d=\boxed{\text{(か)}}$ であることがわかる。

(ii)　関数 $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は $a<\boxed{\text{(き)}}$ または $a>\boxed{\text{(く)}}$ である。a がこの条件を満たすとき，$g(x)$ は $x=\boxed{\text{(け)}}$ で極大値 M をとる。また，方程式 $g(x)=M$ の解は $x=\boxed{\text{(け)}}$ と $x=\boxed{\text{(こ)}}$ である。

(iii)　曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a,\ g(a))$ における接線の方程式は，$y=\boxed{\text{(さ)}}\,x+\boxed{\text{(し)}}$ である。さらに，

$$F(a)=\int_0^a \left\{g(x)-\boxed{\text{(さ)}}\,x-\boxed{\text{(し)}}-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\,dx$$

と定める。ただし，e は自然対数の底である。このとき，$F(a)=\boxed{\text{(す)}}$ と表され，a の関数 $F(a)$ の最大値は $\boxed{\text{(せ)}}$ である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) 座標平面において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ の表す正方形 S を考える。正方形 S の辺上の異なる5点

$$\mathrm{P}_0(0,\ 0),\quad \mathrm{P}_1(p_1,\ 1),\quad \mathrm{P}_2(1,\ q_2),\quad \mathrm{P}_3(p,\ 0),\quad \mathrm{P}_4(p_4,\ q_4)$$

は次の条件を満たすとする。$i=1,\ 2,\ 3$ に対して，点 P_i は正方形 S の頂点でなく，点 P_i を通る正方形 S の辺を線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$ と表すとき，$\angle \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i\mathrm{A}_i = \angle \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i\mathrm{B}_i$ が成り立つ。ただし，$0^\circ < \angle \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i\mathrm{A}_i < 90^\circ$ とする。

このとき，$p_1 = \boxed{\text{(あ)}}$，$q_2 = \boxed{\text{(い)}}$ である。さらに，$0 < p \leqq \boxed{\text{(う)}}$ のとき $(p_4,\ q_4) = \left(0,\ \boxed{\text{(え)}}\right)$ であり，$\boxed{\text{(う)}} \leqq p < 1$ のとき $(p_4,\ q_4) = \left(\boxed{\text{(お)}},\ 1\right)$ である。ただし，(う) には数を入れ，それ以外の上記の空欄は p を用いて表しなさい。

(2) 座標空間において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq 1$ の表す立方体 T を考える。立方体 T の面上の異なる5点

$$\mathrm{Q}_0(0,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}_1(a_1,\ b_1,\ 1),\quad \mathrm{Q}_2(a_2,\ 1,\ c_2),\quad \mathrm{Q}_3(a,\ b,\ 0),\quad \mathrm{Q}_4(a_4,\ b_4,\ c_4)$$

は次の条件を満たすとする。$i=1,\ 2,\ 3$ に対して，点 Q_i は立方体 T の頂点でなく，T の辺上にもない。さらに，点 Q_i を含む立方体 T の面は，3点 Q_{i-1}，Q_i，Q_{i+1} の定める平面と直交し，この2つの面が共有する線分を $\mathrm{C}_i\mathrm{D}_i$ と表すとき，$\angle \mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_i\mathrm{C}_i = \angle \mathrm{Q}_{i+1}\mathrm{Q}_i\mathrm{D}_i$ が成り立つ。ただし，$0^\circ < \angle \mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_i\mathrm{C}_i < 90^\circ$ とする。

(i) 2点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(a_1,\ b_1,\ 0)$ を通る直線と平面 $y=1$ の交点の座標は a_1，b_1 を用いて $\left(\boxed{\text{(か)}},\ 1,\ 0\right)$ と表されるので，$a_2 = \boxed{\text{(か)}}$ である。

(ii) a，b を用いて $a_1 = \boxed{\text{(き)}}$，$b_1 = \boxed{\text{(く)}}$，$a_2 = \boxed{\text{(け)}}$，$c_2 = \boxed{\text{(こ)}}$ と表される。さらに，$a_4 = 1$，$b_4 = 0$ となるための必要十分条件は，$\boxed{\text{(さ)}} \leqq a < 1$ かつ $b = \boxed{\text{(し)}}$ となることであって，この条件が成り立つならば，$c_4 = \boxed{\text{(す)}}$ である。また，$0 < a \leqq \boxed{\text{(さ)}}$ かつ $\boxed{\text{(さ)}} \leqq b < 1$ であるとき，$(a_4,\ b_4,\ c_4) = \left(\boxed{\text{(せ)}},\ \boxed{\text{(そ)}},\ 1\right)$ である。ただし，(さ) には数を入れ，(し)，(す) は a を用いて，(せ)，(そ) は a，b を用いて表しなさい。