

## 1 (弧度法)

(1) 次の角度を弧度に直せ。

(i)  $60^\circ$       (ii)  $-75^\circ$       (iii)  $315^\circ$

(2) 次の弧度を度数に直せ。

(i)  $\frac{\pi}{4}$       (ii)  $-\frac{2}{3}\pi$       (iii)  $\frac{7}{12}\pi$

(3) 半径  $r$ , 中心角  $\angle AOB = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) の扇形 OAB がある。点 A における扇形の接線と直線 OB の交点を P とするとき, (弧 AB の長さ)  $<$  (線分 AP の長さ) であることを示せ。

(4)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき  $\sin \theta < \theta < \tan \theta$  であることを示せ。

## 2 (単位円による定義)

$0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$  とする。

(1)  $\sin x = \sin y$  を満たす点  $(x, y)$  の集合を図示せよ。

(2)  $\cos x \leq \cos y$  を満たす点  $(x, y)$  の集合を図示せよ。

## 3 (三角関数の周期)

- (1)  $0^\circ \leq \theta \leq 1080^\circ$  のとき,  $\sin 6\theta = \sin 15\theta = 0$  を満たす  $\theta$  の値をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた  $\theta$  に対して,  $\sin \theta \sin(\theta - 30^\circ)$  のとる値の総和を求めよ。

## 4 (単位円と公式)

定義に基づいて, 次の各公式を導け。

- (1) 補角の公式:  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ ,  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
- (2) 負角の公式:  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ,  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
- (3) 余角の公式:  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

## 5 (三角不等式)

次の不等式を解け。

(1)  $\cos(2\theta + 55^\circ) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$

(2)  $\sin \theta < \cos \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

## 6 (2つの注意)

(1) 任意の  $\theta$  に対して  $a \sin \theta + b \cos \theta + c = 0$  が成り立つような定数  $a, b, c$  を求めよ。(2)  $0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi$  のとき, 連立方程式

$$\begin{cases} \cos x + \sin y = 1 \\ \sin x + \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$$

を解け。

## 7 (三角関数の対称式)

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$  のとき, 次の各値を求めよ。

- (1)  $\sin \theta \cos \theta$
- (2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$
- (3)  $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

## 8 (加法定理)

## (1) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

を導け。

- (2)  $\alpha, \beta$  がともに鋭角で,  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ,  $\sin \beta = \frac{6}{5\sqrt{13}}$  のとき,  $\sin(\alpha + \beta)$ ,  $\tan(\alpha + \beta)$  の値を求めよ。

9 (2倍角の公式・3倍角の公式)

- (1)  $\theta = 72^\circ$  のとき  $\cos 3\theta = \cos 2\theta$ ,  $\sin 3\theta = -\sin 2\theta$  であることを示せ。
- (2)  $\cos 72^\circ$  を求めよ。

10 (和  $\Leftrightarrow$  積の公式)

- (1) 三角形 ABC において,  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$  が成り立つことを示せ。
- (2) 三角形 ABC において  $\angle A = 60^\circ$  であるとき,  $\sin B \sin C$  のとり得る値の範囲を求めよ。

## □11(三角関数の合成)

- (1)  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  のとき, 不等式  $\sqrt{2} < \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta < \sqrt{3}$  を解け。
- (2)  $0 \leq \theta \leq \pi$  のとき,  $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$  の最大値と最小値を求めよ。

## □12(最大・最小)

次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

- (1)  $y = 4 \sin^2 x + 2 \cos x + \cos 2x$
- (2)  $y = (2 \sin x + 1)(2 \cos x + 1)$
- (3)  $y = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

13 (2直線のなす角)

2直線  $x + 2y - 2 = 0$ ,  $x - 3y + 3 = 0$  のなす角を求めよ。

14 (円の媒介変数表示)

原点を中心とする半径1の円を  $C_1$ , 点  $(4, 0)$  を中心とする半径2の円を  $C_2$  とする。円  $C_1$  上を点  $A(1, 0)$  から出発して反時計回りに動く点  $P$  と円  $C_2$  上を点  $B(6, 0)$  から出発して反時計回りに動く点  $Q$  があり, 点  $P$  の角速度はつねに点  $Q$  の角速度の2倍である。出発してはじめて  $PQ = AB$  となるような点  $P, Q$  の座標を求めよ。

## 15 (回転した点の座標)

点  $A(4, 3)$  を原点  $O$  のまわりに  $60^\circ$  回転した点  $B$  の座標を求めよ。

## 16 (三角関数のグラフ)

(1) 次の関数のグラフをかけ。

(i)  $y = \cos x$       (ii)  $y = \sin 2x$       (iii)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(2)  $\cos \theta$  と  $\frac{1}{2} \sin \theta$  のうち大きい方(等しいときはその値)を  $z$  とする。 $z$  の最小値を求めよ。



1 確認：三角関数を学ぶのに先立って、まず角度の表し方を確認する。

中学までは1周を  $360^\circ$  とする度数法を用いてきたが、 $360^\circ$  には数学的根拠がないのでむしろ扱いにくい。そこで、半径  $r$  の円周の長さが  $2\pi r$  にあることに注目して、1周の角度を  $2\pi$  (半周の角度を  $\pi$ ) と定めた弧度法を用いることにする。弧度法の単位はラジアン (rad) であるが、通常は省略して角度の数値だけを表す。(度数法の  $^\circ$  は省略できない。)

扇形の中心角  $\theta$ 、弧長  $l$ 、面積  $S$  が互いに比例関係にあるので、弧度法を用いれば

$$l = r\theta, \quad S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

と簡単な式で表せる。弧度法と度数法の変換は

$$180^\circ = \pi \text{ (rad)}$$

により行なわれるが、はじめから度数法は存在しなかったとみなすと弧度法が簡単にマスターできる。事実、通常よく用いられる角度は、 $\frac{\pi}{3}$  のように半円の何等分かと考えた方がわかりやすい。しかし、実際の入試では度数法表示も出題されるので、わかりやすい弧度法に浸りきってしまうのも困る。そこで、このファイルでは、敢えて弧度法と度数法を取り混ぜて表し、頭を働かせてもらえるようにしてある。

(3)は図から明らかな気分にさせられるが、円は外側に膨らんでいるので、どちらが長いかは微妙である。そこで、面積比較で大小をはっきりさせる。(3)から導かれる

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \sin \theta < \theta < \tan \theta$$

は、(数学 III でも)よく用いられる重要な公式なので、覚えておく方がよい。

解答：

$$(1) \text{ (i) } \frac{\pi}{3} \quad \text{(ii) } -\frac{5}{12}\pi \quad \text{(iii) } \frac{7}{4}\pi$$

$$(2) \text{ (i) } 45^\circ \quad \text{(ii) } -120^\circ \quad \text{(iii) } 105^\circ$$

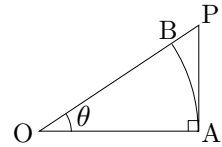
(3)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき、扇形 OAB は  $\triangle OAP$  に含まれるから、面積を比べると

$$\frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \tan \theta$$

$$\therefore r\theta < r \tan \theta$$

弧 AB の長さは  $r\theta$ 、線分 AP の長さは  $r \tan \theta$  であるから、

$$(\text{弧 AB の長さ}) < (\text{線分 AP の長さ}) \quad (\text{おわり})$$

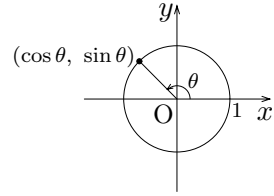


(4)  $(\triangle OAB \text{ の面積}) < (\text{扇形 OAB の面積}) < (\triangle OAP \text{ の面積})$  より

$$\frac{1}{2} \cdot r^2 \sin \theta < \frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \tan \theta$$

$$\therefore \sin \theta < \theta < \tan \theta \quad (\text{おわり})$$

2 確認：単位円  $x^2 + y^2 = 1$  上において、点  $(1, 0)$  を角度  $0$  として反時計まわりに  $\theta$  だけ回転した点の座標を  $(\cos \theta, \sin \theta)$ 、2 点  $(0, 0)$ ,  $(\cos \theta, \sin \theta)$  を通る直線の傾きを  $\tan \theta$  とすることが三角関数の定義であった。



2 変数  $x, y$  のどちらか一方を固定して、定義に基づいて単位円を図示して解くことが本問のねらいである。(1)のような場合は、まず一般角で求めておいてから指定された範囲内だけ抜き出すと考えた方がわかりやすい。

本問からわかる結果：

$$\sin \alpha = \sin \beta \iff \beta = \alpha + 2n\pi \text{ または } \beta = \pi - \alpha + 2n\pi$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \iff \beta = \pm \alpha + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

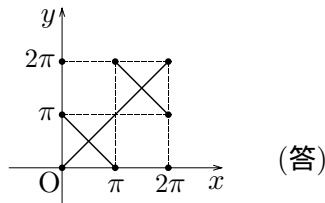
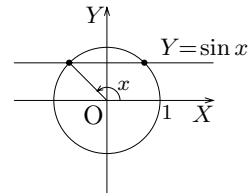
は公式として覚えておきたい。

解答：

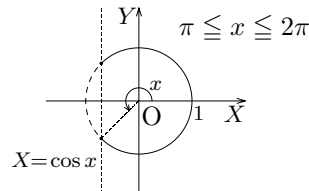
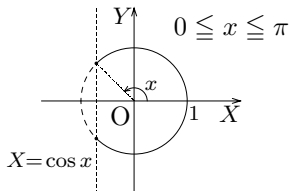
(1)  $x$  を固定すると、 $y$  は

$$y = x + 2n\pi \text{ または } y = \pi - x + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$0 \leq x \leq 2n\pi, 0 \leq y \leq 2n\pi$  の範囲だけ図示すると、



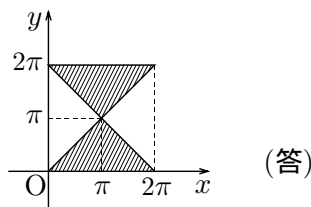
(2)  $x$  を固定して  $\cos x \leq \cos y$  を満たす  $y$  の範囲を求めると



$$0 \leq x \leq \pi \text{ のとき } 0 \leq y \leq x \text{ または } 2\pi - x \leq y \leq 2\pi$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi \text{ のとき } 0 \leq y \leq 2\pi - x \text{ または } x \leq y \leq 2\pi$$

となるから、これを図示すると次図の斜線部分(境界を含む)となる。



3 確認： $(\cos \theta, \sin \theta)$  は単位円周上の点として定義されているので、 $\theta$  について  $2\pi$  ( $360^\circ$ ) ごとに  $\cos \theta, \sin \theta$  は同じ値をくり返すことになる。同様に、傾き  $\tan \theta$  は  $\pi$  ( $180^\circ$ ) ごとに同じ値をくり返す。一般に、関数  $f(x)$  に対して、0 でないある定数  $p$  が存在して

$$f(x+p) = f(x)$$

が成り立つとき、 $f(x)$  は  $p$  を周期とする周期関数であるという。このような  $p$  の中で最小正のものを基本周期という。

問題解法上は、1 周期の範囲だけ詳しく調べれば一般的条件がわかるため、初等のかつ具体的考察ができることに意義がある。本問では、そうした直接的解法の間接的感覚を養うことに重点をおきたい。

解答：

(1)  $\sin 6\theta = 0, \sin 15\theta = 0$  より

$$6\theta = 180^\circ \times m, 15\theta = 180^\circ \times n \quad (m, n \text{ は整数})$$

$$\theta = 30^\circ \times m = 12^\circ \times n$$

$$\therefore 5m = 2n \quad (m, n \text{ は整数})$$

5 と 2 は互いに素であるから

$$m = 2k, n = 5k \quad (k \text{ は整数})$$

と表される。 $\theta = (30m)^\circ = (60k)^\circ, 0^\circ \leq \theta \leq 1080^\circ$  より

$$\theta = (60k)^\circ \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, 18) \quad (\text{答})$$

(2)  $f(\theta) = \sin \theta \sin(\theta - 30^\circ)$

とおくと、 $\sin$  の定義より

$$f(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta \{-\sin(\theta - 30^\circ)\} = \sin \theta \sin(\theta - 30^\circ) = f(\theta)$$

であるから、 $f(\theta)$  は  $180^\circ$  を周期とする。

$$f(0^\circ) = 0$$

$$f(60^\circ) = \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f(120^\circ) = \sin 120^\circ \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるから、求める和は

$$\sum_{k=0}^{18} f((60k)^\circ) = 0 \times 7 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

(注) 2 点  $(\cos(\theta + 180^\circ), \sin(\theta + 180^\circ)), (\cos \theta, \sin \theta)$  の原点に関する対称性より

$$(\cos(\theta + 180^\circ), \sin(\theta + 180^\circ)) = (-\cos \theta, -\sin \theta)$$

となることを用いたが、 $f(\theta)$  が  $180^\circ$  を周期とすることに気づかないで  $f(180^\circ), f(240^\circ), f(300^\circ)$  まで求めたとしても大した手間ではない。積和の公式 ( $\rightarrow$  10) を用いれば、

$$\sin \theta \sin(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{2} \{\cos 30^\circ - \cos(2\theta - 30^\circ)\}$$

と変形されて見通し良くなるが、劇的に易しくなるわけでもない。

④ 確認：角  $\theta$  に対して  $\pi - \theta$  を補角， $\frac{\pi}{2} - \theta$  を余角という。実は(度数法表示では)中学校で習う(ことになっている)用語なのだが，知らない人が意外に多い。

本問で確認する3つの公式は，図形のイメージと結びつけて覚えておくことが大切である。下の解答(証明)では図は入らないが，各自で図をかいて確認してほしい。また，公式の名前も用語とあわせて覚えておこう。

解答：

(1)  $\theta$  の値によらず  $\frac{\theta + (\pi - \theta)}{2} = \frac{\pi}{2}$  であるから，

点  $(\cos \theta, \sin \theta)$  と点  $(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta))$  は  $y$  軸に関して対称である。よって，

$$(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta)) = (-\cos \theta, \sin \theta)$$

が成り立つ。 (おわり)

(2) 2点  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ， $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$  は  $x$  軸に関して対称であるから，

$$(\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = (\cos \theta, -\sin \theta)$$

が成り立つ。 (おわり)

(3)  $\theta$  の値によらず  $\frac{\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{2} = \frac{\pi}{4}$  であるから，

点  $(\cos \theta, \sin \theta)$  と点  $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$  は  $y = x$  に関して対称である。よって，

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

が成り立つ。 (おわり)

(注) 厳密に言えば，上の証明では「図形と方程式」の知識を認めている。だからと言って証明の正当性を損なうわけではない。一方で，これらの公式の証明において加法定理(→⑧)を用いていないことはしっかりと記憶にとどめておこう。それは，(方針によっては)加法定理の証明において補角の公式，余角の公式，負角の公式を用いるからである。

5 確認：三角関数の不等式は、最終的には  $\cos \theta \geq a$  や  $\sin \theta \leq b$  といった形となり、定義に基づいて単位円を図示して解決することになる。具体的には、

$$(1) \text{では } x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \text{では } x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } y < x$$

と解釈して、図形的に処理する。不等式の問題は範囲が指定されるのがふつうなので、どの範囲で考えているかに気を配ることも大切である。

なお、絶対不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

も三角不等式(固有名詞)と呼ばれるので、状況によっては文章の前後関係から判断する必要がある。

解答：

$$(1) 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より}$$

$$55^\circ \leq 2\theta + 55^\circ \leq 415^\circ$$

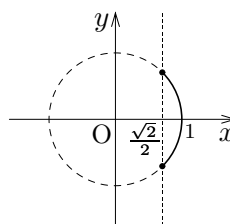
であることに注意して、

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

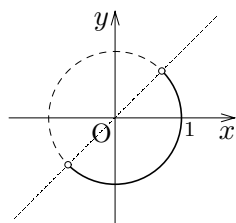
の図より範囲を読み取ると、

$$315^\circ \leq 2\theta + 55^\circ \leq 405^\circ$$

$$\therefore 130^\circ \leq \theta \leq 175^\circ \quad (\text{答})$$



(2) 円  $x^2 + y^2 = 1$  の周上で、領域  $y < x$  に含まれる部分の角度を読み取って



$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \text{ または } \frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi \quad (\text{答})$$

(注) 図の中で・は端点が含まれることを表し、○は端点が含まれないことを表す。

6 確認： $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  はつねに  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  を満たすから従属関係にあるので、(1)では単純に係数比較をすることはできない。そこで、任意の  $\theta$  の値に対して等式が成り立つことより、必要条件として  $a, b$  の値(の候補)を決定することになる。

一方で  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  は独立変数のように振る舞うので、(2)では純粋に2つの式から2変数  $x, y$  を求めることはできず、

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

を追加した4元連立方程式とみて、4つの値  $\cos x, \sin x, \cos y, \sin y$  を求める。

解答：

(1) 任意の  $\theta$  に対して  $a \sin \theta + b \cos \theta + c = 0$  が成り立つから、

$$\theta = 0 \text{ のとき } b + c = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } a + c = 0$$

$$\theta = \pi \text{ のとき } -b + c = 0$$

の各式が成り立つことが必要である。これらを連立1次方程式として解くと  $a = b = c = 0$  となるが、逆に

$$0 \sin \theta + 0 \cos \theta + 0 = 0$$

は任意の  $\theta$  に対して成り立つから必要十分である。よって、求める値は

$$a = b = c = 0 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{cases} \cos x + \sin y = 1 & \dots\dots \text{①} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{3} & \dots\dots \text{②} \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 & \dots\dots \text{③} \\ \cos^2 y + \sin^2 y = 1 & \dots\dots \text{④} \end{cases}$$

①, ②を④に代入して  $y$  を消去すると

$$(\sqrt{3} - \sin x)^2 + (1 - \cos x)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + 4 = 1$$

③より

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \quad \dots\dots \text{⑤}$$

③, ⑤より  $\cos x$  を消去して

$$(2 - \sqrt{3} \sin x)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$4 \sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin x + 3 = (2 \sin x - \sqrt{3})^2 = 0$$

⑤とあわせて

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

①, ②に代入して

$$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin y = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi$  より

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad y = \frac{\pi}{6} \quad (\text{答})$$

7 確認： $x, y$  の多項式  $f(x, y)$  が  $f(x, y) = f(y, x)$  を満たすとき， $f(x, y)$  を (2変数の) 対称式といい，対称式  $f(x, y)$  は基本対称式  $x + y, xy$  の多項式で表すことができる。

$\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の対称式についてもこの基本が通用するが，

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

が成り立つので，問題が  $\cos \theta + \sin \theta, \cos \theta \sin \theta$  の一方だけを与えるスタイルとなる。そのため印象が随分変わってしまうが，基本対称式  $\cos \theta + \sin \theta, \cos \theta \sin \theta$  をそろえることから始めればよい。

解答：

$$(1) \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の両辺を平方して

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(2) 基本対称式で表した上で ①, ② を代入すると

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{16} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  に注意して，(2) と同様に考えると

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= -\frac{8}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) (2) は基本通り解くと上の解答のようになるが，三角関数の特殊性を活かすと

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8}\right) \right\} \\ &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

と変形することもできる。

8 確認：加法定理を導く方法は多数あるが、大切なことは

- (i) 単位円による定義に忠実であること
- (ii) 回転など具体的なイメージと結びつくこと

である。下の解答ではこの主旨に沿って証明するが、数学Ⅲにおける回転変換

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

とも自然に結びつく。なお、 $\tan$ の加法定理については、 $\sin$ ,  $\cos$ の加法定理を先に証明した上でそれを利用すればよい。(2)では公式を機械的にあてはめればよい。

解答：

(1) 座標平面上で点  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  を原点のまわりに  $\theta$  だけ回転させると、三角関数の定義と余角の公式、負角の公式より

$$(1, 0) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$(0, 1) \mapsto \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

と移る。次に、4点  $(0, 0)$ ,  $(\cos \alpha, 0)$ ,  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $(0, \sin \alpha)$  を頂点とする長方形を原点のまわりに  $\beta$  だけ回転させると、長方形は変形しないから

$$(\cos \alpha, \sin \alpha) = (\cos \alpha)(1, 0) + (\sin \alpha)(0, 1)$$

$$\mapsto (\cos \alpha)(\cos \beta, \sin \beta) + (\sin \alpha)(-\sin \beta, \cos \beta)$$

点  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  はこの回転により点  $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$  に移されるから、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ ,  $\cos \alpha \neq 0$ ,  $\cos \beta \neq 0$  のとき

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{おわり}) \end{aligned}$$

(2)  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ),  $\sin \beta = \frac{6}{5\sqrt{13}}$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) より

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \beta = \frac{17}{5\sqrt{13}}, \quad \tan \alpha = \frac{2}{3}, \quad \tan \beta = \frac{6}{17}$$

であるから、加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{17}{5\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{6}{5\sqrt{13}} = \frac{4}{5} \quad (\text{答})$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{2}{3} + \frac{6}{17}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{17}} = \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$



9 確認：8で導いた加法定理において  $\alpha = \beta$  とすると、2倍角の公式

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

が得られる。また、 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  より

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

が成り立つこともわかる。さらに、 $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$ 、 $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$  として加法定理と2倍角の公式を適用すると、3倍角の公式

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

が得られる。各自で確かめてほしい。

解法上は、これらの公式が

(i) 次数を下げる

(ii)  $\sin \alpha$  だけ、または  $\cos \alpha$  だけで表す

場合に使えることが重要である。

本問は、 $\theta = \frac{3}{5}\pi$  と表示してあれば見やすいのだが、敢えて度数法で表記することにより、数量を見抜くことも学習の対象にしている。

解答：

(1)  $\theta = 72^\circ$  のとき  $5\theta = 360^\circ$  であるから

$$3\theta = 360^\circ - 2\theta$$

であり、基本周期が  $360^\circ$  であることと負角の公式より

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta, \quad \sin 3\theta = -\sin 2\theta \quad (\text{おわり})$$

(2)  $\sin 3\theta = -\sin 2\theta$  に2倍角の公式、3倍角の公式をあてはめると

$$3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = -2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta) = 0$$

$\sin \theta = \sin 72^\circ \neq 0$  であるから

$$3 - 4 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta = 0$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  より

$$3 - 4(1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos \theta = 0$$

$$\therefore 4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 = 0$$

2次方程式の解の公式および  $\cos \theta = \cos 72^\circ > 0$  より

$$\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad (\text{答})$$

(注)  $\cos 3\theta = \cos 2\theta$  に2倍角の公式、3倍角の公式を適用しても解くことができる。その方が「 $\cos \theta$  だけで表す」という方針で一貫しており、考え方として自然ではあるが、因数定理を用いて3次式の因数分解をすることになる。

10 確認：加法定理 (→ 8) は、視点を変えると積を和に直す公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}$$

ととらえられる。ここで、 $\alpha + \beta = A$ ,  $\alpha - \beta = B$  とおくと、和を積に直す公式

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

となる。和を積に直す際には、2つの角度の平均に注目して

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}, \quad B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

とみることがポイントである。

(2)のように、2つの角度の和または差が定数のときには、和  $\Leftrightarrow$  積の公式を用いると展開と合成が一度に完了する。

解答：

(1) 和  $\Leftrightarrow$  積の公式より

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$A + B + C = 180^\circ$  に注意して、補角の公式と半角公式より

$$\cos C - 1 = -\cos(A+B) - 1 = -2 \cos^2 \frac{A+B}{2}$$

2式を辺ごと加えると、余角の公式と加法定理より

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - 1 &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \cos \left( 90^\circ - \frac{C}{2} \right) \times 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\ &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (\text{おわり}) \end{aligned}$$

(2)  $B + C = 120^\circ$  (一定) に注意して

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2} \{ \cos(B-C) - \cos(B+C) \} = \frac{1}{2} \left\{ \cos(2B - 120^\circ) + \frac{1}{2} \right\}$$

$0^\circ < B < 120^\circ$  より

$$-120^\circ < 2B - 120^\circ < 120^\circ$$

であるから、 $\sin B \sin C$  のとり得る値の範囲は

$$0 < \sin B \sin C \leq \frac{3}{4} \quad (\text{答})$$

11 確認：加法定理を用いると

$$\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \sin(x + \alpha)$$

$$\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = \cos(x - \alpha)$$

のように変数を一ヶ所に集めることができる。この操作を(三角関数の)合成という。

一般解法としては、変数を1ヶ所に集める目的で

$$a \sin x + b \cos x \quad (a, b \text{ は } 0 \text{ でない実数定数})$$

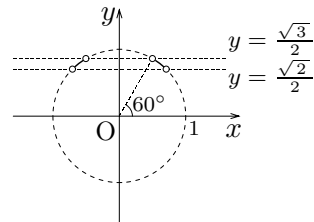
の形であれば合成するのが定石であるが、必ずしも  $a^2 + b^2 = 1$  とは限らないので、直ちに  $a = \cos \alpha$ ,  $b = \sin \alpha$  (または  $a = \sin \alpha$ ,  $b = \cos \alpha$ ) とはできない。そこで、まず

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

としてから、カッコ内の式に加法定理を適用する。 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$  であるから可能である。以下では  $\sin$  で合成した解答例を挙げるが、 $\cos$  で合成してもよい。式変形のコツは、加法定理を表す途中式を省略しないで書くことである。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta &= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2 \left( \sin \theta \cos \frac{\pi}{6} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \sin \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$



であるから、与えられた不等式は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  より  $\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$  であるから、不等式の解は

$$\frac{2}{3}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{4}\pi \quad \therefore \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{11}{12}\pi \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 3 \sin \theta + 4 \cos \theta &= 5 \left( \frac{3}{5} \sin \theta + \frac{4}{5} \cos \theta \right) = 5 (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \\ &= 5 \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha$  は

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす定角である。 $\alpha < \theta + \alpha < \pi + \alpha$  より

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大, } \theta + \alpha = \pi + \alpha \text{ のとき最小}$$

となり、求める値は

$$\text{最大値 } 5, \quad \text{最小値 } -4 \quad (\text{答})$$

(注) 角度  $\alpha$  自体は不明でも差し支えなく、 $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  の値がわかれば十分である。

12 確認：三角関数の処理の基本は，

- (i) 単位円をかくて，定義にもとづく
- (ii)  $\sin x, \cos x, \tan x, \sin x + \cos x$  などのいずれかを  $t$  とでもおき，  
題意すべてを  $t$  だけで書き換える
- (iii)  $a \sin x + b \cos x$  の形は合成して変数を 1ヶ所に集める

の 3 つに分類される。見かけが型通りでないときは，和  $\Leftrightarrow$  積の公式や半角公式などを用いて形を崩してから，基本にあてはめて行けばよい。数多くある三角関数の公式も漫然と覚えるのではなく，処理の仕方ごとに整理して覚えておく方が実用的である。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad 4 \sin^2 x + 2 \cos x + \cos 2x &= 4(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + (2 \cos^2 x - 1) \\ &= -2 \cos^2 x + 2 \cos x + 3 = -2 \left( \cos x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{2} \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ より } \cos x = \frac{1}{2} \text{ のとき最大, } \cos x = -1 \text{ のとき最小となるから,} \\ &\quad \text{最大値 } \frac{7}{2}, \text{ 最小値 } -1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sin x + \cos x = t \text{ とおくと, 加法定理を用いて} \\ t &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

と変形できるから， $t$  のとり得る範囲は

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

$t = \sin x + \cos x$  の両辺を平方して， $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  を適用すると

$$\begin{aligned} t^2 &= 1 + 2 \sin x \cos x \quad \therefore 2 \sin x \cos x = t^2 - 1 \\ y &= 4 \sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) + 1 = 2(t^2 - 1) + 2t + 1 \\ &= 2 \left( t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \text{ より } t = \sqrt{2} \text{ のとき最大, } t = -\frac{1}{2} \text{ のとき最小となるから,} \\ &\quad \text{最大値 } 3 + 2\sqrt{2}, \text{ 最小値 } -\frac{3}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y &= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \sin 2x + \cos 2x + 2 \end{aligned}$$

(2)と同様にして  $\sin 2x + \cos 2x = \dots = \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$  と変形され，

$$\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \text{ に注意すると, } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ で最大, } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \text{ で最小となるから}$$

$$\text{最大値 } 2 + \sqrt{2}, \text{ 最小値 } 1 \quad (\text{答})$$

13 確認：2直線のなす角は，直線の傾きに注目するか方向ベクトルに注目するかによって， $\tan$ の加法定理またはベクトルの内積でとらえられる。ここでは， $\tan$ の加法定理を用いる基本を確認する。

2直線の傾きを  $\tan \alpha$ ,  $\tan \beta$  とする。  $\tan 90^\circ$  は定義できないので，

$$2 \text{ 直線が直交} \iff (\text{傾きの積}) = \tan \alpha \tan \beta = -1$$

の場合は直接考えることにし，加法定理適用からは除外する。

$-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $-90^\circ < \beta < 90^\circ$  で考えるとき，2直線のなす角は

$$\alpha - \beta, \beta - \alpha, 180^\circ - (\alpha - \beta), 180^\circ - (\beta - \alpha)$$

のうち鋭角 ( $0^\circ$  と  $90^\circ$  の間の角) となるものである。ところが，問題を解くごとに， $\tan$  の1周期の範囲に角度を絞って4つに場合分けするのは面倒である。

そこで， $\tan$  の値の振舞に注目してみると

$$\tan(\beta - \alpha) = -\tan(\alpha - \beta)$$

$$\tan\{180^\circ - (\alpha - \beta)\} = -\tan(\alpha - \beta)$$

$$\tan\{180^\circ - (\beta - \alpha)\} = \tan(\alpha - \beta)$$

となって，角度を調べる煩雑な作業が「符号を変えるだけ」という単純な内容になる。その中で鋭角のものはと言えば，単に絶対値(正の値)をとるだけのことである。

以上をまとめると， $\tan \alpha$ ,  $\tan \beta$  を傾きとする2直線のなす角  $\theta$  について

$$\tan \alpha \tan \beta = -1 \text{ のとき } \theta = 90^\circ$$

$$\tan \alpha \tan \beta \neq -1 \text{ のとき } \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

解答：

2直線の傾きを

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \tan \beta = \frac{1}{3} \quad (-90^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad -90^\circ < \beta < 90^\circ)$$

とおくと，

$$\tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{6} \neq -1$$

であるから2直線は直交しない。

2直線のなす角を  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) とすると，加法定理より

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \right| = 1 \end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  より  $\theta = 45^\circ$  であり，

$$2 \text{ 直線のなす角は } 45^\circ \quad (\text{答})$$

14 確認：三角関数は単位円周上の座標で定義されたが，逆に円周上の点を  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  を用いて表すことにより，三角関数の公式を活かした処理が可能となる。ここで取り上げる例題も，純粹に図形的に解こうとすると難しい。「角速度が2倍」という条件については，点 Q の回転角  $\theta$  に対して点 P の回転角を  $2\theta$  とすればよい。

計算処理においては，公式  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  および加法定理を意識して，類似の項どうしを集めて整理することにより混乱を避ける。

解答：

問題の仮定より

$$P(\cos 2\theta, \sin 2\theta), \quad Q(4 + 2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

と表すことができる。公式を用いて

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos 2\theta - 2 \cos \theta - 4)^2 + (\sin 2\theta - 2 \sin \theta)^2 \\ &= (\cos 2\theta - 2 \cos \theta)^2 - 8(\cos 2\theta - 2 \cos \theta) + 16 + (\sin 2\theta - 2 \sin \theta)^2 \\ &= (\cos 2\theta - 2 \cos \theta)^2 + (\sin 2\theta - 2 \sin \theta)^2 - 8 \cos 2\theta + 16 \cos \theta + 16 \\ &= 5 - 4(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta) - 8 \cos 2\theta + 16 \cos \theta + 16 \\ &= 5 - 4 \cos(2\theta - \theta) - 8(2 \cos^2 \theta - 1) + 16 \cos \theta + 16 \\ &= -16 \cos^2 \theta + 12 \cos \theta + 29 \end{aligned}$$

$PQ = AB = 5$  のとき

$$-16 \cos^2 \theta + 12 \cos \theta + 29 = 25$$

$$16 \cos^2 \theta - 12 \cos \theta - 4 = 0$$

$$4(\cos \theta - 1)(4 \cos \theta + 1) = 0$$

$0 < \theta < 2\pi$  で最小の  $\theta$  を選んで

$$\cos \theta = -\frac{1}{4}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

2倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}, \quad \sin 2\theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

以上を P, Q の座標を表す式に代入して

$$P\left(-\frac{7}{8}, -\frac{\sqrt{15}}{8}\right), \quad Q\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \quad (\text{答})$$

15 確認：「回転」と言えば数学 III の回転変換を思い浮かべるかも知れないが、回転の本質は複素数とは無関係であった。(→ 8) 実を言うと、回転した点の座標を求めるだけであれば、加法定理を用いた解法の方がずっと早いのである。

その理屈は単純で、原点を中心とする半径  $r$  の円周上で点  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  を  $\varphi$  だけ回転させると点  $(r \cos(\theta + \varphi), r \sin(\theta + \varphi))$  になるというものである。言われてみれば当たり前ののだが、使いこなせない人は意外に多い。

解答：

$(4, 3) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  ( $r > 0$ ) とおくと

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}$$

求める点 B の座標は  $(5 \cos(\theta + 60^\circ), 5 \sin(\theta + 60^\circ))$  であるが、加法定理より

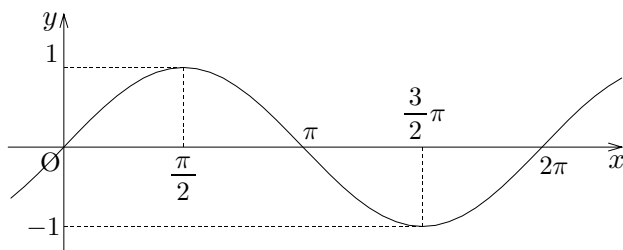
$$\begin{aligned} \cos(\theta + 60^\circ) &= \cos \theta \cos 60^\circ - \sin \theta \sin 60^\circ \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 60^\circ) &= \sin \theta \cos 60^\circ + \cos \theta \sin 60^\circ \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

よって、

$$B\left(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{答})$$

16 確認： $y = \sin x$  のグラフは、透明な円柱に巻きつけられた糸を横からみた形状で、いわゆるサインカーブと呼ばれるものである。



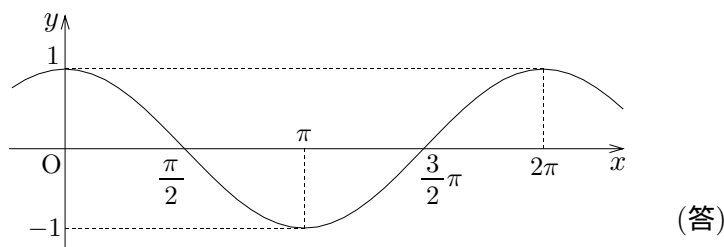
このグラフの形を直感的に認めると、単一の式で表された三角関数のグラフならかくことができる。

5, 11, 12 などで見えてきたように、方程式、不等式などの考察では単位円(による定義)を用いるのがふつうで、数学 II では三角関数のグラフの活躍の場はほとんどない。というより、数学 III の微分法を用いないと正確なグラフがかけないので、数学 II の範囲では(1)のような「ただグラフをかくだけ」の問題しか出せないのである。

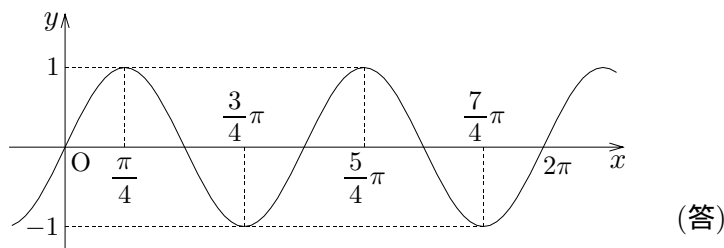
そういう意味では、(2)のようなグラフ利用の効果は意外な盲点である。

解答：

(1) (i)  $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  (→ 8) であるから、 $y = \cos x$  のグラフは  $y = \sin x$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-\frac{\pi}{2}$  だけ平行移動させたもので、次図のようになる。

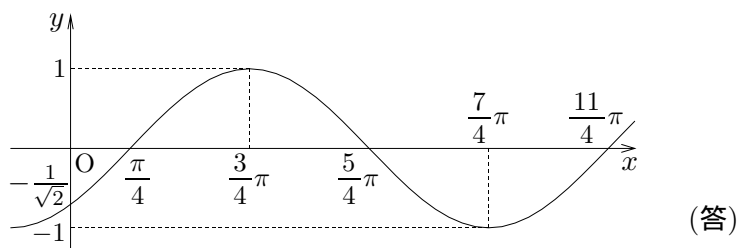


(ii)  $y = \sin 2x$  のグラフは、 $y = \sin x$  のグラフを  $x$  軸方向に  $\frac{1}{2}$  倍したものであるから、次図のようになる。





- (iii)  $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$  のグラフは,  $y = \sin x$  のグラフを  $x$  軸方向に  $\frac{\pi}{4}$  だけ平行移動させたものであるから, 次図のようになる。

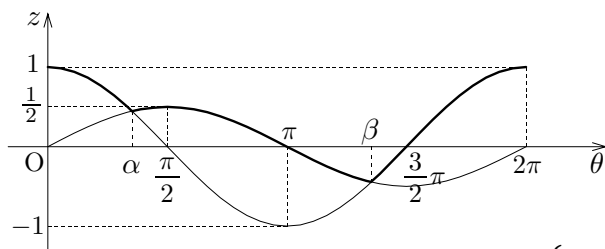


- (2)  $\cos \theta$  も  $\frac{1}{2} \sin \theta$  も基本周期は  $2\pi$  であるから,

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

として差し支えない。

$y = \cos \theta$  および  $y = \frac{1}{2} \sin \theta$  のグラフをかくと



太字は  $y = \max\left\{\cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta\right\}$  のグラフ

図のように,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \sin \theta \quad \dots\dots (*)$$

を満たす  $\theta$  の値を  $\alpha, \beta$  とすると,

$$z = \max\left\{\cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta\right\} \text{ の最小値は } \cos \beta \left( = \frac{1}{2} \sin \beta \right)$$

(\*) と  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  より

$$(2 \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

これを満たす  $\theta$  のうち  $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$  を満たすものが  $\beta$  であるから,

$$\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

以上より

$$z \text{ の最小値は } -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{答})$$