

第 1 問 の 解 答

(1) $x = t$ における C の接線

$$y = (2t - 3)(x - t) + t^2 - 3t + 4$$

が原点を通るとすれば,

$$0 = (2t - 3)(0 - t) + t^2 - 3t + 4$$

$$t^2 = 4 \quad \therefore t = \pm 2$$

よって,

$$l: y = -7x, \quad m: y = x$$

としてよい。

 $A(a, a^2 - 3a + 4)$ とおくと, 点と直線の距離公式を用いて

$$L = \frac{|7a + (a^2 - 3a + 4)|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{|a^2 + 4a + 4|}{2\sqrt{2}} = \frac{(a + 2)^2}{2\sqrt{2}}$$

$$M = \frac{|-a + (a^2 - 3a + 4)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|a^2 - 4a + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{(a - 2)^2}{\sqrt{2}}$$

と表されるから,

$$\begin{aligned} \sqrt{L} + \sqrt{M} &= \frac{|a + 2| + \sqrt{5}|a - 2|}{\sqrt{5\sqrt{2}}} \\ &= \begin{cases} \frac{-(1 + \sqrt{5})a + 2(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5\sqrt{2}}} & (a \leq -2) \\ \frac{(1 - \sqrt{5})a + 2(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{5\sqrt{2}}} & (-2 \leq a \leq 2) \\ \frac{(1 + \sqrt{5})a + 2(1 - \sqrt{5})}{\sqrt{5\sqrt{2}}} & (a \geq 2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$-\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5\sqrt{2}}} < 0, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5\sqrt{2}}} < 0, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5\sqrt{2}}} > 0 \text{ より, } \sqrt{L} + \sqrt{M} \text{ は}$$

 $a = 2$ のとき最小

であり, そのとき

$$A(2, 2) \quad (\text{答})$$

である。

(2) 条件は,

領域 D が領域 $px + qy \leq 0$ に含まれることであるが, 領域 D を放物線 C に置き換えてもよく,任意の実数 x に対して $px + q(x^2 - 3x + 4) \leq 0$ が成り立つ

ことと同値である。

$q = 0$ のとき

$$px \leq 0$$

が任意の実数 x に対して成り立つための条件は

$$p = 0$$

$q \neq 0$ のとき

$$px + q(x^2 - 3x + 4) = qx^2 + (p - 3q)x + 4q \leq 0$$

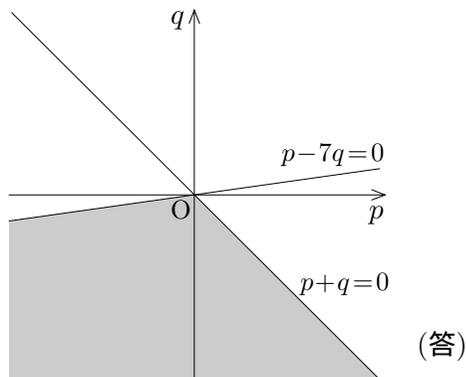
が任意の実数 x に対して成り立つための条件は

$$q < 0 \text{ かつ } (p - 3q)^2 - 4 \cdot q \cdot 4q \leq 0$$

条件をまとめると、

$$p = q = 0 \text{ または } “q < 0 \text{ かつ } (p + q)(p - 7q) \leq 0”$$

であり、 pq 平面上に図示すると、次図の網目部分(境界を含む)となる。



第 2 問 の 解 答

(1)

$${}_{14}C_7 = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2^3 \times 3 \times 11 \times 13$$

$$a_7 = \frac{{}_{14}C_7}{7!} = \frac{2^3 \times 3 \times 11 \times 13}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{11 \times 13}{7 \times 6 \times 5} = \frac{143}{210}$$

であるから,

$$a_7 < 1 \quad (\text{答})$$

(2)

$$a_n = \frac{{}_{2n}C_n}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^3}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^3} \cdot \frac{\{(n-1)!\}^3}{\{2(n-1)\}!} = \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{2(2n-1)}{n^2}$$

であるから,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \iff 2(2n-1) < n^2 \iff n^2 - 4n + 2 > 0$$

ここで, $f(n) = n^2 - 4n + 2$ とおくと,

$$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 2 = -1 < 0$$

$$f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 2 = -1 < 0$$

$$f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 2 = 2 > 0$$

であるから, $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲は

$$n \geq 4 \quad (\text{答})$$

(3)

$$a_1 = 2! = 2, \quad a_2 = \frac{4!}{(2!)^3} = 3, \quad a_3 = \frac{2 \times 5}{3^2} a_2 = \frac{10}{3},$$

$$a_4 = \frac{2 \times 7}{4^2} a_3 = \frac{35}{12}, \quad a_5 = \frac{2 \times 9}{5^2} a_4 = \frac{21}{10},$$

$$a_6 = \frac{2 \times 11}{6^2} a_5 = \frac{77}{60}$$

 $n \geq 7$ のとき, (1), (2) より

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_8}{a_7} \cdot a_7 < 1$$

であるから, a_n が整数になることはない。以上より, a_n が整数となるのは

$$n = 1, 2 \quad (\text{答})$$

ですべてである。

第 3 問 の 解 答

(1) $f(x) = x^3 - 3a^2x$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$a > 0$ を考えて, $f(x)$ が $x \geq 1$ で増加するための条件は

$$x > 1 \text{ において } f'(x) = 3(x+a)(x-a) > 0$$

が成り立つことであるから,

$$\{x \mid x > 1\} \subset \{x \mid x < -a \text{ または } x > a\}$$

より

$$a \leq 1 \quad (\text{答})$$

(注) 「単調に増加」を $f'(x) \geq 0$ とする解釈もあるが, 同じ結果が得られる。
 どちらの解釈が正しいかではなく, 前提と因果関係が合っているかどうか
 で採点されたのではないかと思われる。

(2) $a > 0$ を考えて, $f(x)$ の増減は

x		$-a$		a	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

条件 1, 条件 2 をともみたすのは,

$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = b$ が 3 点で交わり,
 真ん中の交点が $1 < x < a$ の範囲にある

ときであり, 条件は

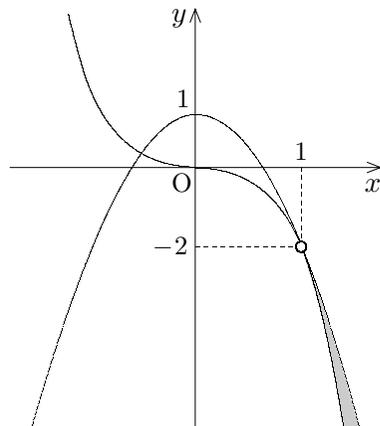
$$a > 1 \text{ かつ } f(a) < b < f(1)$$

である。

$$f(a) = -2a^3, \quad f(1) = -3a^2 + 1$$

$$-3a^2 + 1 - (-2a^3) = 2a^3 - 3a^2 + 1 = (a-1)^2(2a+1)$$

も考えて, 点 (a, b) の動き得る範囲は, 次図の網目部分(境界を含まない)となる。



(答)

第 4 問 の 解 答

(1) $P(t, t^2)$, $Q(x, y)$ とおくと, $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$ より

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t^2 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

t を消去すると

$$y = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \text{ かつ } -2 \leq x \leq 2$$

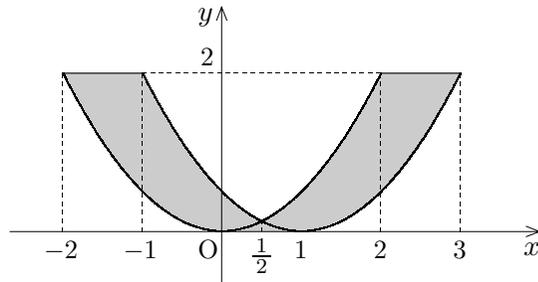
点 Q の軌跡は

$$\text{放物線 } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ 上の } -2 \leq x \leq 2 \text{ の部分 (答)}$$

(2) 点 P が C 上を動き, 点 R が線分 OA 上を動くとき,

$$\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$$

をみたく点 S が動いてできる領域は, 点 Q の軌跡を \overrightarrow{OR} だけ平行移動したものの和集合であるから, 次図の網目部分(境界を含む)のようになる。



この面積 M は

$$\begin{aligned} M &= 2 \left(1 \times 2 + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(x-1)^2 dx - \int_{-2}^0 \frac{1}{2}x^2 dx \right) \\ &= 4 + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^0 \\ &= 4 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{8} + 8 \right) - \left(0 + \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{96 + 63 - 64}{24} \\ &= \frac{95}{24} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$