

第 1 問 の 解 答

放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 P は

$$P = \int_0^1 s(x-1)^2 dx = \left[\frac{s}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}s \quad \dots\dots ①$$

放物線 $B: y = -x^2 + t^2$ と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 Q は

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^t (-x^2 + t^2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-t}^t (x+t)(x-t) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (2t)^3 = \frac{2}{3}t^3 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

A と B が接する条件は

$$\begin{cases} y = s(x-1)^2 \\ y = -x^2 + t^2 \end{cases}$$

より y を消去して得られる 2 次方程式

$$(s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0$$

は重解をもつから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\text{判別式}) &= s^2 - (s+1)(s-t^2) = 0 \\ s(1-t^2) &= t^2 \\ \therefore s &= \frac{t^2}{1-t^2} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

①, ②, ③ より

$$\frac{Q}{P} = \frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{1-t^2}} = 2t(1-t^2) = -2t^3 + 2t$$

これを $f(t)$ とおくと

$$f'(t) = -6t^2 + 2 = -6\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

t	(0)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	(1)
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	\nearrow	極大	\searrow

$\frac{Q}{P}$ の最大値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$

第 2 問 の 解 答

正六角形 ABCDEF の外接円の中心(AD の中点)を O とし,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AO} = \vec{b}$$

とおく。点 P が辺 AB 上を, 点 Q が辺 CD 上を動くことより

$$\overrightarrow{AP} = p\vec{a} \quad (0 \leq p \leq 1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= (1-q)\overrightarrow{AC} + q\overrightarrow{AD} \\ &= (1-q)(\vec{a} + \vec{b}) + q(2\vec{b}) \\ &= (1-q)\vec{a} + (1+q)\vec{b} \quad (0 \leq q \leq 1) \end{aligned}$$

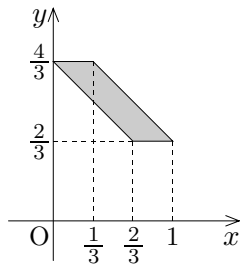
と表され, 点 R は PQ を 2 : 1 に内分するから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \frac{\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AQ}}{2+1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot p\vec{a} + \frac{2}{3} \left\{ (1-q)\vec{a} + (1+q)\vec{b} \right\} \\ &= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + p\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right) + q\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1)$$

これを xy 平面上に図示すると



よって, 点 R が通り得る範囲の面積 S は, 平行四辺形 ABCO の面積の $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ 倍であるから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{9} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{1^2 \times 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 3 問 の 解 答

(1) 点 $P(s, t)$ が 1 秒後に $t - s = -1$ となるのは,

$$(1, 0) \text{ または } (0, -1)$$

のときであるから,

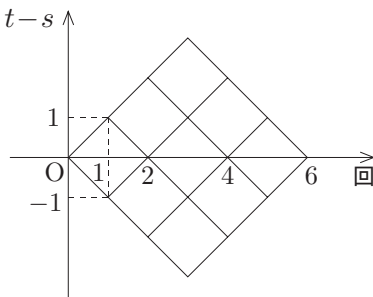
$$\text{求める確率は } \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(2) $P(s, t)$ とするとき, 各回の移動において $t - s$ が $+1, -1$ と変化する確率は

ともに $\frac{1}{2}$ であるから, 6 秒間移動するとき $t - s$ についての

$$\text{根元事象の確率はすべて } \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

である。6 秒後に $t - s = 0$ となる根元事象は



であるから, 6 秒後に点 P が直線 $y = x$ 上にある確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16} \quad (\text{答})$$

(別法) (1) がヒントであることに気づかない場合は, 直接的に考えてもよい。

点 P が 6 秒間に $(1, 0)$ の方向に a 回, $(0, 1)$ の方向に b 回, $(-1, 0)$ の方向に c 回, $(0, -1)$ の方向に d 回移動するとすれば, 直線 $y = x$ 上にあるのは

$$a + b + c + d = 6 \quad \text{かつ} \quad a - c = b - d$$

のときであり,

$$a + d = b + c = 3$$

$$\therefore (a, d) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3),$$

$$(b, c) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

求める確率は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{6!}{3!3!} \times 2^2 + \frac{6!}{1!2!3!} \times 2^3 + \frac{6!}{1!1!2!2!} \times 2^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times (20 \times 4 + 60 \times 8 + 180 \times 4) \\ &= \frac{4^2 \times (5 + 30 + 45)}{4^6} = \frac{5}{16} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

第 4 問 の 解 答

(1) $p = 2 + \sqrt{5}$ のとき, $q = -\frac{1}{p}$ とおくと

$$q = -\frac{1}{\sqrt{5} + 2} = -(\sqrt{5} - 2) = 2 - \sqrt{5}$$

であり,

$$p + q = 4, \quad pq = -1$$

であるから,

$$a_1 = p + q = 4 \quad (\text{答})$$

$$a_2 = p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 4^2 - 2 \times (-1) = 18 \quad (\text{答})$$

(2) $a_1 a_n = (p + q)(p^n + q^n) = p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1})$
 $= a_{n+1} - a_{n-1} \quad (\text{答})$

(3) 「 a_n が自然数」であることを, n についての数学的帰納法で示す。

(1) より, $n = 1, 2$ のときは既に成立する。

a_{k-1}, a_k がともに自然数であるとすれば, (2) より

$$a_{k+1} = a_1 a_k + a_{k-1} = 4a_k + a_{k-1}$$

であるから, a_{k+1} も自然数となる。

以上より, 任意の自然数 n に対して a_n が自然数であることが示された。

(おわり)

(4) (2) より

$$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$$

であるから,

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1})$$

これが任意の自然数 n に対して成り立つから,

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_2, a_1) = \gcd(18, 4) = 2 \quad (\text{答})$$