

## 第 1 問

座標平面において2つの放物線  $A: y = s(x-1)^2$  と  $B: y = -x^2 + t^2$  を考える。  
ただし  $s, t$  は実数で,  $0 < s, 0 < t < 1$  をみたすとする。放物線  $A$  と  $x$  軸および  $y$  軸  
で囲まれる領域の面積を  $P$  とし, 放物線  $B$  の  $x \geq 0$  の部分と  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれ  
る領域の面積を  $Q$  とする。 $A$  と  $B$  がただ1点を共有するとき,  $\frac{Q}{P}$  の最大値を求めよ。

## 第 2 問

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を、点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき、線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

### 第 3 問

座標平面上で  $x$  座標と  $y$  座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点  $P$  を考える。

(a) 最初に、点  $P$  は原点  $O$  にある。

(b) ある時刻で点  $P$  が格子点  $(m, n)$  にあるとき、その 1 秒後の点  $P$  の位置は、隣接する格子点  $(m+1, n)$ ,  $(m, n+1)$ ,  $(m-1, n)$ ,  $(m, n-1)$  のいずれかであり、また、これらの点に移動する確率は、それぞれ  $\frac{1}{4}$  である。

(1) 最初から 1 秒後の点  $P$  の座標を  $(s, t)$  とする。  $t - s = -1$  となる確率を求めよ。

(2) 点  $P$  が、最初から 6 秒後に直線  $y = x$  上にある確率を求めよ。

## 第 4 問

$p = 2 + \sqrt{5}$  とおき, 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

- (1)  $a_1, a_2$  の値を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  とする。積  $a_1 a_n$  を,  $a_{n+1}$  と  $a_{n-1}$  を用いて表せ。
- (3)  $a_n$  は自然数であることを示せ。
- (4)  $a_{n+1}$  と  $a_n$  の最大公約数を求めよ。