

第 1 問

座標平面上に放物線 C を

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め、領域 D を

$$y \geq x^2 - 3x + 4$$

で定める。原点をとる 2 直線 l, m は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。 $\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件をみたす点 $P(p, q)$ の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 (x, y) に対し不等式 $px + qy \leq 0$ がなりたつ。

第 2 問

数列 a_1, a_2, \dots を

$$a_n = \frac{2n C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

- (1) a_7 と 1 の大小を調べよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。 $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ。
- (3) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

第 3 問

$a > 0$ とし、

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。

- (1) $x \geq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための、 a についての条件を求めよ。
- (2) 次の 2 条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件 1 : 方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2 : さらに、方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

第 4 問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき、

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き、点 R が線分 OA 上を動くとき、

$$\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し、その面積を求めよ。