

第 1 問 の 解 答

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1 + \cos 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} \frac{x}{\sin x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} \cos x = \cos \pi = -1 \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \infty$$

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \text{ を微分すると,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot \sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \sin x \\ &= \frac{\sin x - x \cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x (1 - \sin^2 x) - x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x \cos^2 x - x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x (\sin 2x - 2x)}{2 \sin^2 x} \end{aligned}$$

公式より, $0 < x < \frac{\pi}{4}$ において

$$\sin 2x < 2x$$

であり, $\frac{\pi}{4} \leq x < \pi$ において

$$\sin 2x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq 2x$$

であるから, $0 < x < \pi$ において

$$f'(x) \text{ の符号変化は } -\cos x \text{ と同じ}$$

である。よって, $f(x)$ の $0 < x < \pi$ における増減は

x	(0)	$\frac{\pi}{2}$	(π)
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	(2)	\searrow 極小 \nearrow	(∞)

(答)

第 2 問 の 解 答

(1) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!} \cdot \frac{\{(n-1)!\}^2 \cdot n!}{(2n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1) \cdot 2n}{n^2(n+1)} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \frac{q_n}{p_n} \end{aligned}$$

 $2n+1 = 2(n+1) - 1$ より

$$\gcd(2n+1, n+1) = 1$$

また,

$$\gcd(2n+1, n) = 1$$

であるから,

$$\gcd(2n+1, n(n+1)) = 1$$

 n と $n+1$ の一方は偶数であることも考えて,

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 2n+1 \quad (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \\ &= \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \cdots \frac{q_2}{p_2} \cdot 3 \end{aligned}$$

 $q_n = 2n+1$ および 3 は奇数であり,

$$p_3 = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ は偶数}$$

であるから,

$$n \geq 3 \text{ のとき } a_n \text{ は整数でない。}$$

 $n \leq 2$ については,

$$a_1 = {}_3C_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{5 \times 4}{2! \times 2!} = 5$$

であるから, a_n が整数となるのは

$$n = 1, 2 \quad (\text{答})$$

ですべてである。

第 3 問 の 解 答

点 Q が原点にあるとき，点 R が動いてできる図形を求めるために

$$P(t, t^2), \quad \overrightarrow{OR} = (x, y) = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP}$$

とおくと，

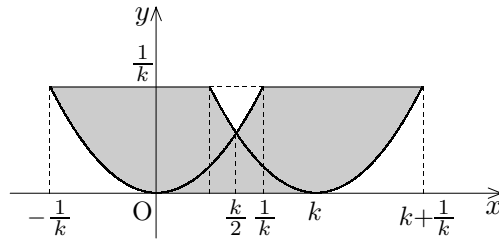
$$x = \frac{t}{k} \text{ かつ } y = \frac{t^2}{k} \text{ かつ } -1 \leq t \leq 1$$

t を消去して

$$y = kx^2 \text{ かつ } -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}$$

この図形を $k\overrightarrow{OQ}$ だけ平行移動したものの和集合が点 R の描く領域である。

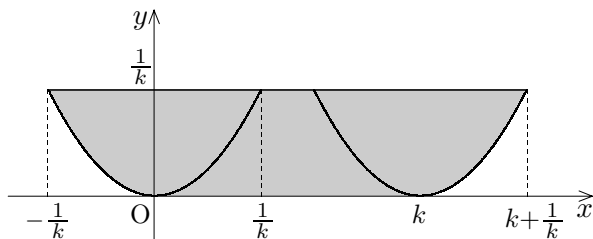
(i) $k \leq \frac{2}{k}$ すなわち $0 < k \leq \sqrt{2}$ であるとき



面積 $S(k)$ は

$$\begin{aligned} S(k) &= 2 \left(\int_{-1/k}^0 \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{k} - \int_{k-\frac{1}{k}}^{\frac{k}{2}} \left\{ \frac{1}{k} - k(x-k)^2 \right\} dx \right) \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx + \frac{1}{2} - \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx \right) \\ &= 2 \int_0^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx + 1 \\ &= 2 \left[\frac{1}{k}x - \frac{k}{3}x^3 \right]_0^{\frac{k}{2}} + 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{k}{2} - \frac{k}{3} \cdot \frac{k^3}{8} \right) + 1 \\ &= -\frac{1}{12}k^4 + 2 \end{aligned}$$

(ii) $k \geq \frac{2}{k}$ すなわち $k \geq \sqrt{2}$ のとき



面積 $S(k)$ は

$$\begin{aligned}
 S(k) &= \int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx + k \cdot \frac{1}{k} + \int_k^{k+\frac{1}{k}} \left\{ \frac{1}{k} - k(x-k)^2 \right\} dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx + 1 + \int_0^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx + 1 \\
 &= -k \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \left(x + \frac{1}{k} \right) \left(x - \frac{1}{k} \right) dx + 1 \\
 &= \frac{k}{6} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} \right)^3 + 1 \\
 &= \frac{4}{3k^2} + 1
 \end{aligned}$$

以上をまとめると,

$$S(k) = \begin{cases} -\frac{1}{12}k^4 + 2 & (0 < k \leq \sqrt{2}) \\ \frac{4}{3k^2} + 1 & (k \geq \sqrt{2}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

であり,

$$\lim_{k \rightarrow +0} S(k) = \lim_{k \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{12}k^4 + 2 \right) = 2 \quad (\text{答})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3k^2} + 1 \right) = 1 \quad (\text{答})$$

が成り立つ。

第 4 問 の 解 答

$f(x) = x^3 - 3a^2x$ を微分すると,

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$a > 0$ を考えて, $f(x)$ の増減は

x		$-a$		a	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

条件 1, 条件 2 をともにみたすのは,

$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = b$ が 3 点で交わり,

真ん中の交点が $1 < x < a$ の範囲にある

ときであり, 条件は

$$a > 1 \text{ かつ } f(a) < b < f(1)$$

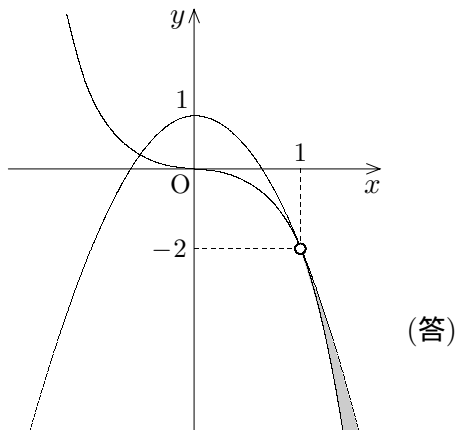
である。

$$f(a) = -2a^3$$

$$f(1) = -3a^2 + 1$$

$$-3a^2 + 1 - (-2a^3) = 2a^3 - 3a^2 + 1 = (a-1)^2(2a+1)$$

であることにも注意して, 点 (a, b) の動き得る範囲は, 次図の網目部分(境界を含まない)となる。



第 5 問 の 解 答

(1) AQ の中点を $M(v)$ とおくと

$$v = \frac{u+1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

AM \perp PM \perp OP より

AM // OP

であるから,

$$v - 1 = kz \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と表され, OP \perp PM より

$$\bar{z}(v - z) + z(\bar{v} - \bar{z}) = 0$$

$$\bar{z}(kz + 1 - z) + z(k\bar{z} + 1 - \bar{z}) = 0$$

$$2(k-1)z\bar{z} + \bar{z} + z = 0$$

点 P(z) は円 C 上にあることより

$$|z|^2 = z\bar{z} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

であるから,

$$2(k-1) \cdot 1 + \frac{1}{z} + z = 0 \quad \therefore k = 1 - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

②に代入して

$$v = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\} z + 1 = -\frac{1}{2}z^2 + z + \frac{1}{2}$$

①より

$$u = 2v - 1 = (-z^2 + 2z + 1) - 1 = -z^2 + 2z \quad (\text{答})$$

$$w = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

③を用いて

$$\bar{w} = \frac{1}{(\bar{z}-1)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2} = \frac{z^2}{(1-z)^2} = z^2 w$$

$$\therefore \frac{\bar{w}}{w} = z^2 \quad (\text{答})$$

これを用いると

$$\begin{aligned} \frac{w + \bar{w} - 1}{w} &= 1 + \frac{\bar{w}}{w} - \frac{1}{w} \\ &= 1 + z^2 - (z-1)^2 \\ &= 2z \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

 $|z| = 1$ を考え,

$$\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|} = \left| \frac{w + \bar{w} - 1}{w} \right| = |2z| = 2|z| = 2 \quad (\text{答})$$

(2) 点 $P(z)$ が C' 上を動くとき,

$$|z| = 1 \text{ かつ } \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \leq \frac{1}{2}$$

④を用いて w の式に書き直すと,

$$\frac{1}{|w|} \left| \frac{w + \bar{w}}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1 \quad \dots\dots \text{⑤}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{w + \bar{w}}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{⑥}$$

$w = x + yi$ (x, y は実数)とおくと, ⑤より

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore x = -y^2 + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{⑦}$$

⑥より

$$\frac{1}{2} \left(\frac{w + \bar{w}}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{w + \bar{w}}{|w|^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{x}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$$

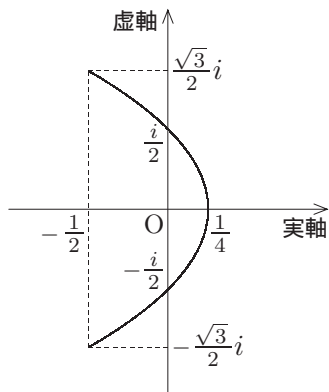
$$x(2x - 1) \leq x^2 + y^2 \quad \therefore x^2 - y^2 - x \leq 0$$

⑦より y^2 を消去すると, $x \leq \frac{1}{4}$ のもとで

$$x^2 - \left(\frac{1}{4} - x \right) - x = x^2 - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{⑧}$$

点 $R(w)$ の軌跡は ⑦かつ ⑧であり, 複素数平面上に図示すると



(答)

第 6 問 の 解 答

(1) V_1 は, 球 $(x-a)^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ が $0 \leq a \leq 1$ で動いてできる領域であるから, 平面 $y = t$ と共有点をもつのは

$$-r \leq t \leq r \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

のときである。 V_3 は, 球 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-b)^2 \leq r^2$ が $0 \leq b \leq 1$ で動いてできる領域であるから, 平面 $y = t$ と共有点をもつのは

$$1-r \leq t \leq 1+r \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

のときである。 $\frac{1}{2} < r < 1$ を考えて, ①かつ②より

$$1-r \leq t \leq r \quad (\text{答})$$

平面 $y = t$ による V_1 の断面は

$$(x-a)^2 + z^2 \leq r^2 - t^2 \quad (0 \leq a \leq 1)$$

V_3 の断面は

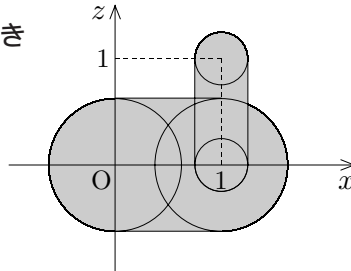
$$(x-1)^2 + (z-b)^2 \leq r^2 - (t-1)^2 \quad (0 \leq b \leq 1)$$

である。

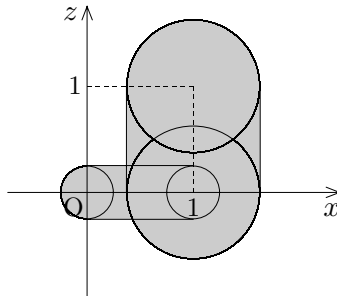
$$r^2 - (t-1)^2 \leq r^2 - t^2 \iff t \leq \frac{1}{2}$$

であることも考えて, 平面 $y = t$ による $V_1 \cup V_3$ の断面を図示すると

$1-r \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2} \leq t \leq r$ のとき



(答)

(2) V_2 の $0 \leq y \leq 1$ の部分は半径 r の直円柱であり, $1-r \leq t \leq r$ の範囲に V_1 と V_3 の共通部分はあるから,

V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれる

ための条件は, (1) で求めた範囲における任意の t に対して

断面が $(x-1)^2 + z^2 \leq r^2$ に含まれる
ことである。

$1-r \leq t \leq \frac{1}{2}$ のときは, $\sqrt{r^2-t^2} < r$ より既に成立する。

$\frac{1}{2} \leq t \leq r$ のときは, 点 $(1 - \sqrt{r^2 - (t-1)^2}, t, \sqrt{r^2 - t^2})$ が V_2 に含まれれば
よいから,

$$\begin{aligned} \{1 - \sqrt{r^2 - (t-1)^2} - 1\}^2 + (\sqrt{r^2 - t^2})^2 &\leq r^2 \\ r^2 - (t-1)^2 + r^2 - t^2 &\leq r^2 \\ \therefore r^2 &\leq (t-1)^2 + t^2 = 2t^2 - 2t + 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

この不等式が $\frac{1}{2} \leq t \leq r$ をみたく任意の t に対して成り立つから,

$$\begin{aligned} r^2 &\leq \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2} < r < 1\right) \\ \therefore \frac{1}{2} < r &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (3) V_1 の体積を S とすると, V_1 と合同な V_2 および V_3 も体積は S である。 V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とすると, V_2 と V_3 の共通部分の体積も T となる。(2) の条件をみたくとき, $V_1 \cap V_3 \subset V_2$ であるから

$$V_1 \cap V_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$$

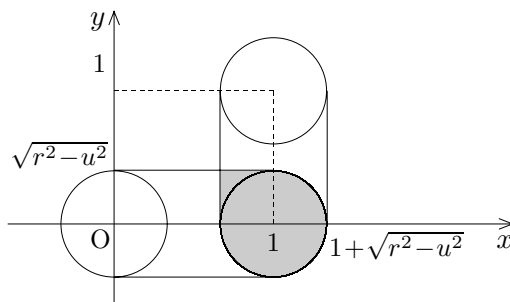
体積を $v(\cdot)$ で表すと,

$$\begin{aligned} v(V_1 \cup V_2 \cup V_3) &= v(V_1) + v(V_2) + v(V_3) - v(V_1 \cap V_2) - v(V_2 \cap V_3) \\ &\quad - v(V_1 \cap V_3) + v(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \\ &= v(V_1) + v(V_2) + v(V_3) - v(V_1 \cap V_2) - v(V_2 \cap V_3) \\ &= 3S - 2T \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (4) V_1 は, 半径 r の半球 2 つと底面の円の半径 r , 高さ 1 の直円柱とを合わせた図形であるから, 体積 S は

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2$$

平面 $z = u$ ($-r \leq u \leq r$) のよる $V_1 \cap V_2$ の断面は



平面 $z = u$ による $V_1 \cap V_2$ の切り口の面積は

$$\pi(\sqrt{r^2 - u^2})^2 \times \frac{3}{4} + (\sqrt{r^2 - u^2})^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)(r^2 - u^2)$$

$V_1 \cap V_2$ の体積 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_{-r}^r \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)(r^2 - u^2) du \\ &= 2\left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) \int_0^r (r^2 - u^2) du \\ &= 2\left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) \left[r^2 u - \frac{1}{3}u^3 \right]_0^r \\ &= 2\left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) \cdot \frac{2}{3}r^3 = \left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3 \end{aligned}$$

(3) より, V の体積は

$$\begin{aligned} 3S - 2T &= 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2\right) - 2\left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3 \\ &= 3\pi r^2 + \left(2\pi - \frac{8}{3}\right)r^3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

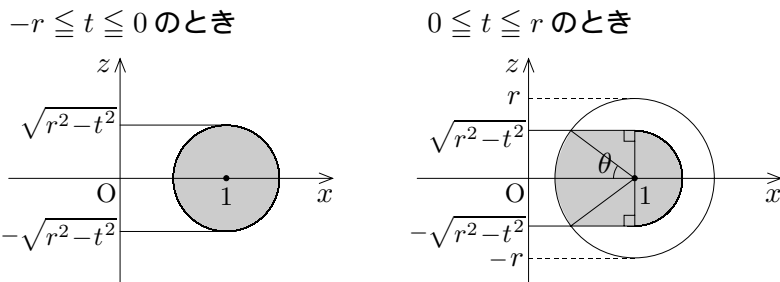
(注) V_1 と V_2 の共通部分の体積 T は, y 軸に垂直な断面を考えても計算できる。

平面 $y = t$ による V_2 の断面は

$$-r \leq t \leq 0 \text{ のとき } (x-1)^2 + z^2 \leq r^2 - t^2$$

$$0 \leq t \leq r (< 1) \text{ のとき } (x-1)^2 + z^2 \leq r^2$$

であるから, V_1 と V_2 の共通部分の断面を図示すると



この断面積を $M(t)$ とおくと, $-r \leq t \leq 0$ のとき

$$M(t) = \pi(r^2 - t^2)$$

$0 \leq t \leq r$ のとき, $\sin \theta = \frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{r}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) により θ を定めると,

$$\begin{aligned} M(t) &= \pi(\sqrt{r^2 - t^2})^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot r \sin \theta \cdot r \cos \theta \times 2 + \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\theta \\ &= \frac{\pi}{2}(r^2 - t^2) + r^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{r} \cdot \frac{t}{r} + r^2 \theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}(r^2 - t^2) + t\sqrt{r^2 - t^2} + r^2\theta$$

V_1 と V_2 の共通部分の体積 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_{-r}^r M(t) dt \\ &= \pi \int_{-r}^0 (r^2 - t^2) dt + \frac{\pi}{2} \int_0^r (r^2 - t^2) dt \\ &\quad + \int_0^r t\sqrt{r^2 - t^2} dt + r^2 \int_0^r \theta dt \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \pi \int_{-r}^0 (r^2 - t^2) dt &= \pi \left[r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-r}^0 = -\pi \left(-r^3 + \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{2}{3} \pi r^3 \\ \frac{\pi}{2} \int_0^r (r^2 - t^2) dt &= \frac{\pi}{2} \left[r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^r = \frac{\pi}{2} \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{1}{3} \pi r^3 \\ \int_0^r t\sqrt{r^2 - t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} (r^2 - t^2)' dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (r^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r = \frac{1}{3} r^3 \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{r} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ より}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{t}{r}, \quad \frac{dt}{d\theta} = -r \sin \theta$$

であるから, $t = r \cos \theta$ により置換積分すると

$$\begin{aligned} r^2 \int_0^r \theta dt &= r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \theta \frac{dt}{d\theta} d\theta \\ &= r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta d\theta \\ &= r^3 \left[\theta(-\cos \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\cos \theta) d\theta \\ &= 0 + r^3 \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= r^3 \end{aligned}$$

となるから,

$$T = \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} r^3 + r^3 = \left(\pi + \frac{4}{3} \right) \pi$$