

第 1 問 の 解 答

(1) 3倍角・2倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (b-3)\cos\theta - a \end{aligned}$$

と表されるから, $x = \cos\theta$ のとき

$$f(\theta) = 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a \quad (\text{答})$$

この x の整式を $F(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1} \\ &= \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \\ &= \frac{4(x^3 - 1) + 2a(x^2 - 1) + (b-3)(x-1)}{x-1} \\ &= 4(x^2 + x + 1) + 2a(x+1) + b - 3 \\ &= 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

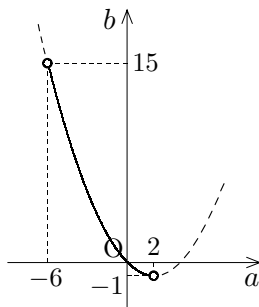
(2) $g(\theta)$ を表す $x (= \cos\theta)$ の整式を $G(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} G(x) &= 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1 \\ &= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}(a+2)^2 + 2a + b + 1 \\ &= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a + b \end{aligned}$$

 $G(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから「 $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとる」 \iff 「 $G(x)$ が $-1 < x < 1$ の範囲で最小値 0 をとる」

$$\iff -1 < -\frac{a+2}{4} < 1 \quad \text{かつ} \quad G\left(-\frac{a+2}{4}\right) = -\frac{1}{4}a^2 + a + b = 0$$

$$\iff -6 < a < 2 \quad \text{かつ} \quad b = \frac{1}{4}a(a-4) \quad (\text{答})$$

これを ab 平面上に図示すると

(答)

第 2 問 の 解 答

- (1) 点 P が 6 秒間に $(1, 0)$ の方向に a 回, $(0, 1)$ の方向に b 回, $(-1, 0)$ の方向に c 回, $(0, -1)$ の方向に d 回移動するとすれば, 直線 $y = x$ 上にあるのは

$$a + b + c + d = 6 \text{ かつ } a - c = b - d$$

のときであり,

$$a + d = b + c = 3$$

$$\therefore (a, d) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3),$$

$$(b, c) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

求める確率は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{6!}{3!3!} \times 2^2 + \frac{6!}{1!2!3!} \times 2^3 + \frac{6!}{1!1!2!2!} \times 2^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times (20 \times 4 + 60 \times 8 + 180 \times 4) \\ &= \frac{4^2 \times (5 + 30 + 45)}{4^6} \\ &= \frac{5}{16} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) (1)と同じ記号を用いると, 点 P が 6 秒後に原点 O にあるのは

$$a + b + c + d = 6 \text{ かつ } a - c = b - d = 0$$

すなわち

$$(a, b, c, d) = (0, 3, 0, 3), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (0, 3, 0, 3)$$

のときであるから, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{6!}{3!3!} \times 2 + \frac{6!}{1!1!2!2!} \times 2\right) = \frac{20 \times 2 + 180 \times 2}{4^6} = \frac{25}{256} \quad (\text{答})$$

(考察) 事象としては (2) は (1) の特別な場合なので, この設問の順番は不自然にも思えるが, 敢えてこの順序の必然を考えてみると, (1) の出題から $x - y$ の変化に注目せよということではないだろうか。

$P(s, t)$ とおくと, $s - t$ の値は

$(1, 0)$ 方向の移動で $+1$,

$(0, 1)$ 方向の移動で -1 ,

$(-1, 0)$ 方向の移動で -1 ,

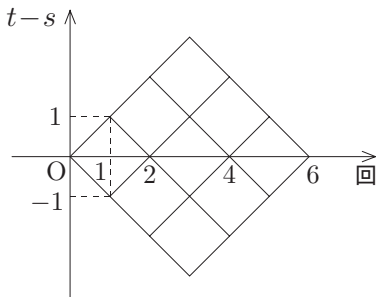
$(0, -1)$ 方向の移動で $+1$

だけ変化するから, 各回の移動で

$$s - t \text{ が } +1 \text{ 変化する確率も } -1 \text{ 変化する確率も } \frac{1}{2}$$

である。

(1) 6秒後に $s - t = 0$ となる根元事象は



であるから, 6秒後に点Pが直線 $y = x$ 上にある確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16} \quad (\text{答})$$

(2) $s = 0$ かつ $t = 0 \iff s - t = 0$ かつ $s + t = 0$

であることに注目して, 点 $P(s, t)$ が6秒後に $s + t = 0$ となる確率を求めると, $s - t$ の場合と同様に

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_3 = \frac{5}{16}$$

$s + t$ の変化と $s - t$ の変化は事象が独立であるから, 点Pが6秒後に原点Oにある確率は

$$\frac{5}{16} \times \frac{5}{16} = \frac{25}{256} \quad (\text{答})$$

$s + t$ の変化と $s - t$ の変化が独立であることは, 各回の移動において

$$(s, t) \mapsto (s + 1, t) \iff s - t \text{ が } +1, \quad s + t \text{ が } +1 \text{ だけ変化}$$

$$(s, t) \mapsto (s, t + 1) \iff s - t \text{ が } -1, \quad s + t \text{ が } +1 \text{ だけ変化}$$

$$(s, t) \mapsto (s - 1, t) \iff s - t \text{ が } -1, \quad s + t \text{ が } -1 \text{ だけ変化}$$

$$(s, t) \mapsto (s, t - 1) \iff s - t \text{ が } +1, \quad s + t \text{ が } -1 \text{ だけ変化}$$

であることからわかる。

第 3 問 の 解 答

- (1) 垂直二等分線 L は 2 点 $0, \alpha$ から等距離にある点の軌跡であるから, L の方程式は

$$|z| = |z - \alpha|$$

$z = \frac{1}{w}$ を代入して

$$\left| \frac{1}{w} - \alpha \right| = \left| \frac{1}{w} \right|$$

両辺に $\left| \frac{w}{\alpha} \right|$ をかけることにより, 点 w の軌跡は

$$\left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = \left| \frac{1}{\alpha} \right| \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

で表される

$$\text{中心 } \frac{1}{\alpha}, \quad \text{半径 } \frac{1}{|\alpha|} \quad (\text{答})$$

の円から原点を除いた図形であることがわかる。

- (2) $\beta = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

であり, 点 β と点 β^2 を結ぶ線分は

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad |z| \leq 1$$

で表される。 $z = \frac{1}{w}$ を代入することにより, 点 w の軌跡は

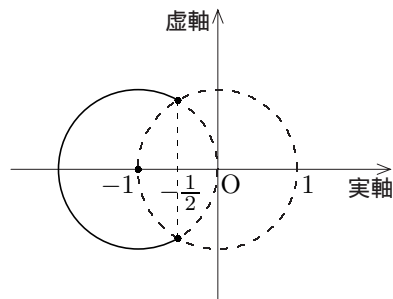
$$\frac{1}{w} + \frac{1}{w} = -1 \quad \text{かつ} \quad \left| \frac{1}{w} \right| \leq 1$$

$$\bar{w} + w = -w\bar{w} \quad \text{かつ} \quad |w| \geq 1$$

$$(w+1)(\bar{w}+1) = 1 \quad \text{かつ} \quad |w| \geq 1$$

$$\therefore |w+1| = 1 \quad \text{かつ} \quad |w| \geq 1$$

これを複素数平面上に図示すると



(答)

第 4 問 の 解 答

(1) $p = 2 + \sqrt{5}$ のとき, $q = -\frac{1}{p}$ とおくと

$$q = -\frac{1}{\sqrt{5} + 2} = -(\sqrt{5} - 2) = 2 - \sqrt{5}$$

であり,

$$p + q = 4, \quad pq = -1$$

であるから,

$$a_1 = p + q = 4 \quad (\text{答})$$

$$a_2 = p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 4^2 - 2 \times (-1) = 18 \quad (\text{答})$$

(2) $a_1 a_n = (p + q)(p^n + q^n) = p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1})$
 $= a_{n+1} - a_{n-1} \quad (\text{答})$

(3) 「 a_n が自然数」であることを, n についての数学的帰納法で示す。

(1) より, $n = 1, 2$ のときは既に成立する。

a_{k-1}, a_k がともに自然数であるとすれば, (2) より

$$a_{k+1} = a_1 a_k + a_{k-1} = 4a_k + a_{k-1}$$

であるから, a_{k+1} も自然数となる。

以上より, 任意の自然数 n に対して a_n が自然数であることが示された。

(おわり)

(4) (2) より

$$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$$

であるから,

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1})$$

これが任意の自然数 n に対して成り立つから,

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_2, a_1) = \gcd(18, 4) = 2 \quad (\text{答})$$

第 5 問 の 解 答

直線 $y = ax + b$ と C が接する条件は,

$$\begin{cases} y = x^2 + k \\ y = ax + b \end{cases}$$

より y を消去して得られる 2 次方程式

$$x^2 - ax + (k - b) = 0$$

が重解をもつことより,

$$(\text{判別式}) = a^2 - 4(k - b) = 0$$

$$\therefore k = b + \frac{a^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

直線 $y = b$ は D と接しないから

$$a \neq 0$$

としてよく,

$$\begin{cases} x = y^2 + k \\ x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \end{cases}$$

が接するための条件は, ①において $a \mapsto \frac{1}{a}$, $b \mapsto -\frac{b}{a}$ と置き換えたものになるから,

$$k = -\frac{b}{a} + \frac{1}{4a^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

直線 $y = ax + b$ が C と D の共通接線となるための条件は

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2}$$

である。

(1) $a \neq -1$ のもとで ①かつ②を解くと, ① - ② より

$$b\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) = 0$$

$$b \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{1-a^4}{4a^2}$$

$a \neq -1$ より

$$b = \frac{a}{a+1} \cdot \frac{1-a^4}{4a^2} = \frac{(1-a)(1+a^2)}{4a} \quad \dots\dots \textcircled{3} \quad (\text{答})$$

①に代入して

$$k = \frac{(1-a)(1+a^2)}{4a} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 - a + 1}{4a} \quad \dots\dots \textcircled{4} \quad (\text{答})$$

(2) $y = 2x + b$ が C と D の共通接線するとき, ④より

$$k = \frac{2^2 - 2 + 1}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{a^2 - a + 1}{4a} = \frac{3}{8} \text{ となる } a \text{ の値を求めて,}$$

$$2(a^2 - a + 1) = 3a$$

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$(a - 2)(2a - 1) = 0$$

$$\therefore a = 2, \frac{1}{2}$$

③より b も求めて,

$$(a, b) = \left(2, -\frac{5}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{16}\right)$$

$a = -1$ のとき ①, ② は一致し, $k = \frac{3}{8}$ の場合は

$$(a, b) = \left(-1, \frac{1}{8}\right)$$

が得られる。

以上より, C と D の共通接線の傾き a と y 切片 b の組は

$$(a, b) = \left(2, -\frac{5}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{16}\right), \left(-1, \frac{1}{8}\right) \quad (\text{答})$$

の3つが存在し, C と D の共通接線は3本存在する。

(証明おわり)

第 6 問 の 解 答

(1) 点 Q が $(0, 0, 1)$ にあるとき, 点 P は

平面 $z = \frac{1}{2}$ 上にある中心 $(0, 0, \frac{1}{2})$, 半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円

周上を動くから, x 座標のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

$x_P = OP \cos \theta = \cos \theta$ であるから

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

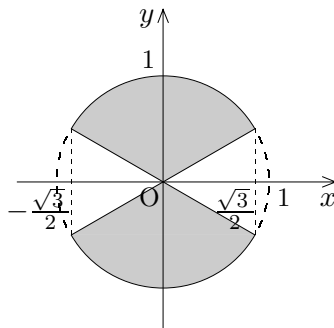
であり, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のもとで

$$30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ \quad (\text{答})$$

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ を自由に動くときも点 P の x 座標のとり得る値の範囲は (1) と同じであるから, 点 P が描く図形は

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。したがって, 辺 OP が通過し得る範囲 K は x 軸のまわりの回転体であり, K の xy 平面による切り口は



であるから, K の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2 \left\{ \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi(1-x^2) dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\ &= 2\pi \left(\left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{24} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{24} - \frac{\sqrt{3}}{24} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$