

1.

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$

とおくと,

$$\begin{cases} b+c = ak & \dots\dots \textcircled{1} \\ c+a = bk & \dots\dots \textcircled{2} \\ a+b = ck & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

① + ② + ③ より

$$2(a+b+c) = k(a+b+c) \\ \therefore a+b+c = 0 \text{ または } k = 2$$

(i) $a+b+c = 0$ のとき

① より

$$b+c = ak = -a$$

 $a \neq 0$ より

$$k = -1$$

②, ③ についても同様であるから,

$$a+b+c = 0 \text{ かつ } abc \neq 0$$

のとき

$$k = -1$$

となる。

(ii) $k = 2$ のとき

① - ② のとき

$$b-a = 2(a-b)$$

$$a-b = 0$$

$$\therefore a = b$$

同様に, ② - ③ より

$$b-c = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

 $a = b = c \neq 0$ であれば仮定を満たし, $k = 2$ となる。

(i), (ii) より

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = 2 \text{ または } -1 \text{ (答)}$$

2.

(1) $S_1 = a_1 = 2a_1 + 1 - 6$ より

$$a_1 = 5 \quad (\text{答})$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2a_2 + 2 - 6 \text{ より}$$

$$a_2 = a_1 + 4 = 9 \quad (\text{答})$$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$S_n = 2a_n + n - 6$$

$$S_{n-1} = 2a_{n-1} + (n-1) - 6$$

の差をとると

$$a_n = 2a_n - 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} - 1$$

$$\therefore a_n - 1 = 2(a_{n-1} - 1)$$

 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 4$, 公比 2 の等比数列であるから,

$$a_n - 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$$\therefore a_n = 2^{n+1} + 1 \quad (\text{答})$$

3.

(1) 点Dについての仮定より

$$\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

と表され,

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - x\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - x\overrightarrow{OA}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - x\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - x\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + x^2|\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{2} + x^2 \cdot 1^2 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{DB}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2x\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + x|\overrightarrow{OA}|^2 = 1^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + 1^2 = 2 - x$$

$$|\overrightarrow{DC}|^2 = \dots = 2 - x$$

であるから,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{2}}{\sqrt{2-x} \sqrt{2-x}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{2}}{2-x} \quad (\text{答})$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ より

$$2 - x > 0$$

であることを考えると, 相加・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(x-2+2)^2 - (x-2+2) + \frac{1}{2}}{2-x} \\ &= \frac{(x-2)^2 + 3(x-2) + \frac{5}{2}}{2-x} \\ &= (2-x) + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2-x} - 3 \\ &\geq 2\sqrt{(2-x) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2-x}} - 3 = \sqrt{10} - 3 \end{aligned}$$

ここで, 不等式の等号は

$$2-x = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2-x} > 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

のとき成り立つから,

$$x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ のとき, } \cos \theta \text{ の最小値 } \sqrt{10} - 3 \quad (\text{答})$$

4.

(1) P における $y = x^2$ の接線の方程式は

$$y = 2a(x - a) + a^2$$

$$\therefore y = 2ax - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

Q における $y = x^2$ の接線の方程式は

$$y = 2bx - b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②を解くと, ① - ②より

$$0 = 2(a - b)x - (a^2 - b^2)$$

 $a \neq b$ より

$$0 = 2x - (a + b) \quad \therefore x = \frac{a + b}{2}$$

①に代入して

$$y = 2a \cdot \frac{a + b}{2} - a^2 = ab$$

交点 R の座標は

$$R\left(\frac{a + b}{2}, ab\right) \quad (\text{答})$$

(2)

$$\overrightarrow{RP} = (a, a^2) - \left(\frac{a + b}{2}, ab\right) = \left(\frac{a - b}{2}, a(a - b)\right) = (a - b)\left(\frac{1}{2}, a\right)$$

$$\overrightarrow{RQ} = (b, b^2) - \left(\frac{a + b}{2}, ab\right) = (b - a)\left(\frac{1}{2}, b\right)$$

 $\triangle PQR$ の面積 S は, $a < b$ を考えて,

$$S = \frac{1}{2}|b - a|^2 \left| \frac{1}{2} \times b - a \times \frac{1}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{4}|b - a|^3$$

$$= \frac{1}{4}(b - a)^3 \quad (\text{答})$$

1.

(1) $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$AC^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 4$$

$$\therefore AC = 2 \quad (\text{答})$$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

補角の公式より

$$\cos \angle ADC = -\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

AD = x とおき, $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$2^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x - 1 = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{22}{16}$$

 $x = AD > 0$ より

$$x - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{22}}{4}$$

$$\therefore x = AD = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{22}}{4} \quad (\text{答})$$

2.

(1) 点 P, Q, R についての仮定より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3} \vec{b}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{3} \vec{c}$$

であるから,

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \\ \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{c} \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &= \frac{1}{6} |-3\vec{a} + 4\vec{b}| \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 16|\vec{b}|^2} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{9 \times 1^2 - 24 \times \frac{1}{2} + 16 \times 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PR}| &= \frac{1}{6} |-3\vec{a} + 2\vec{c}| \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{c} + 4|\vec{c}|^2} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{9 \times 1^2 - 12 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (2)と同様にして,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \frac{1}{4} |\vec{a}|^2 - \frac{1}{6} \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9} \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{4} \times 1^2 - \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{9 - 3 - 6 + 4}{36} \\ &= \frac{1}{9} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

3.

$$b = k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

を固定すると, $a \leq b \leq c$ となるのは

$$a \text{ が } k \text{ 通り, } c \text{ は } 6 - k \text{ 通り}$$

であるから, $a \leq b \leq c$ となる場合の数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 k(6-k) &= 6 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 k^2 \\ &= 6 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 6 - \frac{1}{6} \times 5 \times 6 \times 11 \\ &= 90 - 55 \\ &= 35 \end{aligned}$$

$a \leq b \leq c$ となる確率は

$$\frac{35}{5^3} = \frac{7}{25} \quad (\text{答})$$

(別解) $a \leq b \leq c$ となる (a, b, c) の組は, 3つの「もの」と4つの仕切りを一行に並べて表すことができるから, その場合の数は

$${}_{3+4}C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ 通り}$$

$a \leq b \leq c$ となる確率は

$$\frac{{}_7C_3}{5^3} = \frac{7}{25} \quad (\text{答})$$

4.

(1) 直線 L の方程式は

$$y = -\frac{1}{a}x + 1$$

であり, 連立方程式

$$\begin{cases} y = -x^2 + ax \\ y = -\frac{1}{a}x + 1 \end{cases}$$

を解くことにより, C と L の交点は

$$(a, 0), \left(\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a^2}\right) \quad (\text{答})$$

(2) C と L で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{a}}^a \left\{ -x^2 + ax - \left(-\frac{1}{a}x + 1\right) \right\} dx \\ &= -\int_{\frac{1}{a}}^a \left(x - \frac{1}{a}\right)(x - a) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$