

## 1. 真数条件より

$$x - 1 > 0 \text{ かつ } x - 3 > 0 \quad \therefore x > 3$$

この条件のもとで,

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(x-3) &= \frac{\log_2(x-3)}{\log_2 2^{-1}} \\ &= \frac{\log_2(x-3)}{-\log_2 2} \\ &= -\log_2(x-3) \end{aligned}$$

と変形されるから, 与えられた不等式は

$$\begin{aligned} \log_2(x-1) + \log_2(x-3) &< 0 \\ \log_2(x-1)(x-3) &< \log_2 1 \\ (x-1)(x-3) &< 1 \\ x^2 - 4x + 2 &< 0 \\ \therefore 2 - \sqrt{2} &< x < 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$x > 3$  より

$$3 < x < 2 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

2.  $g(x)^2 = f(x-1)f(x+1)$  より

$$\begin{aligned} (bx^2 + c)^2 &= \{(x-1)^2 + a\}\{(x+1)^2 + a\} \\ b^2x^4 + 2bcx^2 + c^2 &= (x^2 + a + 1)^2 - (2x)^2 \\ &= x^4 + (2a-2)x^2 + (a+1)^2 \end{aligned}$$

これが  $x$  についての恒等式であるから,

$$\begin{cases} b^2 = 1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 2bc = 2a - 2 & \dots\dots \textcircled{2} \\ c^2 = (a+1)^2 & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

①より

$$b = \pm 1$$

③より

$$c = \pm(a+1)$$

であるから,

$$bc = \pm(a+1)$$

②より  $bc$  を消去して

$$a - 1 = \pm(a+1) \quad \therefore a = 0$$

①, ②より  $b, c$  も求めて,

$$(a, b, c) = (0, 1, -1), (0, -1, 1) \quad (\text{答})$$

3.

$$(1) \cos A = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ より}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3}{4}$$

 $\triangle ABC$  において正弦定理より

$$BC = 2 \times 2 \times \sin A = 3 \quad (\text{答})$$

(2)  $AB = x$  とおくと,  $\triangle ABC$  において余弦定理より

$$3^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \left(2 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)x^2$$

$$\therefore x^2 = \frac{6^2}{8 - 2\sqrt{7}} = \frac{6^2}{(\sqrt{7} - 1)^2}$$

 $x = AB > 0$  より

$$AB = \frac{6}{\sqrt{7} - 1} = \frac{6(\sqrt{7} + 1)}{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)} = \sqrt{7} + 1$$

 $p, q$  は整数であるから,

$$p + \sqrt{q} = 1 + \sqrt{7}$$

が成り立つとすれば,

$$p = 1, \quad q = 7 \quad (\text{答})$$

4.

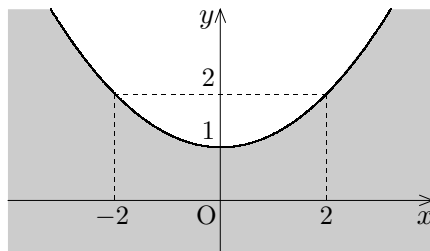
(1)  $y = ax + 1 - a^2$  を  $a$  について整理すると

$$a^2 - xa + (y - 1) = 0$$

実数  $a$  が存在する条件を考えることにより, 直線  $y = ax + 1 - a^2$  の通過領域は

$$x^2 - 4(y - 1) \geq 0 \quad \therefore y \leq \frac{1}{4}x^2 + 1$$

これを図示すると, 次図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)

(2) 点  $(0, 4)$  と直線  $ax - y + (1 - a^2) = 0$  の距離  $d$  は

$$\begin{aligned} d &= \frac{|a \cdot 0 - 4 + 1 - a^2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \frac{a^2 + 1 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \sqrt{a^2 + 1} + \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ &\geq 2\sqrt{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで, 不等式の等号成立条件は

$$\sqrt{a^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

であり,

$$a^2 + 1 = 2 \quad \therefore a = \pm 1$$

であるから, 点  $(0, 4)$  と直線  $y = ax + 1 - a^2$  との距離は

$$a = \pm 1 \text{ のとき最小値 } 2\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

をとる。

(注) 点  $(0, 4)$  と (1) で求めた領域との最小値を求めることと同じであるが, 最小となる  $a$  の値も求めなければならないので, 直線  $y = ax + 1 - a^2$  との距離に戻って考える方が楽である。

1.

(1) 1 回目に偶数の目が出る確率を求めて

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

 $x < y$  となる確率を求めて

$$P(B) = \frac{{}_6C_2}{6^2} = \frac{15}{6^2} = \frac{5}{12} \quad (\text{答})$$

(2)  $A \cap B$  となるのは

$$(x, y) = (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6)$$

のときであるから,

$$P(A \cap B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

(3) 求める条件付き確率  $P_B(A)$  は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad (\text{答})$$

2.

(1) 平行四辺形であることより

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

となることを考えて,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \quad (\text{答})$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} \quad (\text{答})$$

(2) R は AQ 上の点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= k\overrightarrow{AQ} \quad (0 \leq k \leq 1) \\ &= k\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}k\left(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + \frac{7}{9}k\vec{b} \\ &= \frac{2}{3}k\overrightarrow{AP} + \frac{7}{9}k\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

と表される。

R は DP 上の点でもあるから

$$\frac{2}{3}k + \frac{7}{9}k = 1 \quad \therefore k = \frac{9}{13}$$

求める比は

$$AR : RQ = k : (1 - k) = 9 : 4 \quad (\text{答})$$

3.

(1)  $C(a, b)$ とおくと,  $BC$ の中点  $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$  は直線  $y = 2x + 1$  上にあるから

$$\frac{b-2}{2} = 2 \cdot \frac{a+1}{2} + 1$$

$$\therefore b = 2a + 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{BC} = (a-1, b+2)$  と直線  $y = 2x + 1$  は垂直であるから

$$1 \cdot (a-1) + 2(b+2) = 0$$

$$\therefore a + 2b + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より

$$a + 2(2a + 6) + 3 = 0$$

$$5a + 15 = 0$$

$$\therefore a = -3, \quad b = 2 \cdot (-3) + 6 = 0$$

$B$ の対称点  $C$ の座標は

$$C(-3, 0) \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$BP = CP$$

であるから,

$$AP + PB = AP + CP \geq AC$$

である。ここで,

$$4 < 2 \times 3 + 1, \quad 0 > 2 \times (-3) + 1$$

より,  $A$ と $C$ は直線  $y = 2x + 1$  に関して反対側にあるから, 直線  $y = 2x + 1$  と直線  $AC$  との交点に  $P$  があるとき  $AP + PB$  は最小となり, 最小値は

$$AC = \sqrt{(3+3)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{13} \quad (\text{答})$$

4.

(1)  $Q(q, -q^3 + 4q)$  とおく。Q における  $C$  の接線

$$y = (-3q^2 + 4)(x - q) - q^3 + 4q$$

は  $P(2, 0)$  を通るから,

$$0 = (-3q^2 + 4)(2 - q) - q^3 + 4q$$

$$2q^3 - 6q^2 + 8 = 0$$

$$q^3 - 3q^2 + 4 = 0$$

$$(q + 1)(q - 2)^2 = 0$$

 $q \neq 2$  より

$$q = -1$$

であるから,

$$Q(-1, -3) \quad (\text{答})$$

(2) (1) の考察より,  $L$  の方程式は

$$y = 1 \cdot (x + 1) - 3 \quad \therefore y = x - 2$$

ここで,

$$f(x) = (-x^3 + 4x) - (x - 2) = -(x + 1)^2(x - 2)$$

とおくと,  $C$  と  $L$  で囲まれる部分の面積  $S$  は  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれる部分の面積と等しいから,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{-x^3 + 4x - (x - 2)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 \{-(x + 1)^3 + 3(x + 1)^2\} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}(x + 1)^4 + (x + 1)^3 \right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^3 \\ &= \frac{27}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$