

1. 仮定より

$$n = 5x - 1 = 7y - 2 \quad (x, y \text{ は自然数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と表され,

$$5x = 7y - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

整数解を 1 組見つけると

$$5 \times 4 = 7 \times 3 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

\textcircled{2} - \textcircled{3} より

$$5(x - 4) = 7(y - 3)$$

5 と 7 は互いに素であるから,

$$x - 4 = 7z, \quad y - 3 = 5z$$

を満たす非負整数 z が存在し,

$$x = 7z + 4, \quad y = 5z + 3$$

\textcircled{1} に代入すると

$$n = 5(7z + 4) - 1 = 35z + 19 \quad (z \text{ は非負整数})$$

であり,

$$n \text{ を } 35 \text{ で割った余りは } 19 \quad (\text{答})$$

2. 点 C は直線 AB 上にあるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (t \text{ は実数}) \\ &= (1-t)(3, 3, -1) + t(0, -3, 2) \\ &= (-3t+3, -6t+3, 3t-1) \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

と表され,

$$\overrightarrow{DC} = (-3t+1, -6t+4, 3t-2-\sqrt{2})$$

点 O, D は C を中心とする球面 S 上にあるから,

$$OC = DC$$

$$\begin{aligned} &(-3t+3)^2 + (-6t+3)^2 + (3t-1)^2 \\ &= (-3t+1)^2 + (-6t+4)^2 + (3t-2-\sqrt{2})^2 \\ &-60t+19 = (-66-6\sqrt{2})t + 23 + 4\sqrt{2} \\ &6(\sqrt{2}+1)t = 4(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}$$

(*) より

$$C(1, -1, 1) \quad (\text{答})$$

3.

(1)

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt = F(x)$$

の両辺を x で微分すると

$$1 \cdot \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = F'(x)$$

$$\frac{3}{2}ax^2 + bx = 3(b+5)x^2 + 2(a-4)x$$

係数を比べて

$$\frac{3}{2}a = 3(b+5) \quad \text{かつ} \quad b = 2(a-4)$$

 b を消去すると

$$a = 2(b+5) = 2(2a-8+5)$$

$$3a - 6 = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\text{答})$$

 $b = 2(a-4)$ に代入して

$$b = -4 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad F(x) = x^3 - 2x^2$$

を微分すると,

$$F'(x) = 3x^2 - 4x = 3x\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

x	0	$\frac{4}{3}$
$F'(x)$	+ 0 -	0 +
$F(x)$	↗ 極大	↘ 極小 ↗

 $F(x) = x^2(x-2)$ に $x=0, \frac{4}{3}$ を代入して,

$$\text{極大値 } F(0) = 0, \quad \text{極小値 } F\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{32}{27} \quad (\text{答})$$

4.

- (1) 40 枚のカードから 3 枚を取り出して一列に並べるとみなすことにより, 求める確率は

$$P_B(A) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4 \times 3 \times 38}{4 \times 39 \times 38} = \frac{1}{13} \quad (\text{答})$$

- (2) (1)と同様に, 一列に並べる順列とみなして場合の数を数えることにより, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ &= \frac{4 \times 39 \times 38 + 4 \times 39 \times 38 - 4 \times 3 \times 38}{40 \times 39 \times 38} \\ &= \frac{13 + 13 - 1}{10 \times 13} \\ &= \frac{5}{26} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

1. 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は異なる 2 実数解をもつから,

$$(\text{判別式}) = a^2 - 4b > 0$$

$b > 0$ とあわせて,

$$0 < b < \frac{1}{4}a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2次方程式

$$x^2 + (-a^2 + 2b)x + b^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

の判別式を D とすると, ①より

$$D = (-a^2 + 2b)^2 - 4b^2 = a^4 + 4a^2(-b) > a^4 + 4a^2\left(-\frac{1}{4}a^2\right) = 0$$

であるから, 2次方程式 ②は相異なる 2 実数解をもつ。このとき, 2 実数解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = a^2 - 2b > a^2 + 2\left(-\frac{1}{4}a^2\right) = \frac{1}{2}a^2 > 0$$

$$\alpha\beta = b^2 > 0$$

であるから,

$$\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > 0$$

以上より, 2次方程式 ②は相異なる 2 つの正の解をもつ。

(証明おわり)

2.

(1) 与えられた漸化式より

$$a_{2k+1} = -2a_{2k} - 2 = -2(-3a_{2k-1} - 1) - 2 = 6a_{2k-1}$$

$\{a_{2k-1}\}$ は初項 $a_1 = 1$, 公比 6 の等比数列であるから

$$a_{2k-1} = 6^{k-1} \quad (\text{答})$$

(2) 与えられた漸化式より

$$a_2 = -3a_1 - 1 = -3 \times 1 - 1 = -4$$

$$a_{2(k+1)} = -3a_{2k+1} - 1 = -3(-2a_{2k} - 2) - 1 = 6a_{2k} + 5$$

$$\therefore a_{2(k+1)} + 1 = 6(a_{2k} + 1)$$

$\{a_{2k} + 1\}$ は初項 $a_2 + 1 = -4 + 1 = -3$, 公比 6 の等比数列であるから

$$a_{2k} + 1 = -3 \cdot 6^{k-1} \quad \therefore a_{2k} = -3 \cdot 6^{k-1} - 1 \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^m (6^{k-1} - 3 \cdot 6^{k-1} - 1) \\ &= -2 \cdot \frac{6^m - 1}{6 - 1} - m \\ &= -\frac{2}{5} \cdot 6^m + \frac{2}{5} - m \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

3. $1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表すと

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} z^{11} + az + b &= 2^{11}\left(\cos\frac{11}{3}\pi + i\sin\frac{11}{3}\pi\right) + az + b \\ &= 2^{11}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + a(1 + \sqrt{3}i) + b \\ &= (a + b + 1024) + (a - 1024)\sqrt{3}i \\ &= 0 \end{aligned}$$

を満たすとき, $a + b + 1024$ および $a - 1024$ は実数, $\sqrt{3}i$ は虚数であるから

$$a + b + 1024 = 0 \quad \text{かつ} \quad a - 1024 = 0$$

$$\therefore a = 1024, \quad b = -2048 \quad (\text{答})$$

4.

$$(1) f'(x) = \frac{1}{e^x + 1}, \quad f(0) = 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt \\ &= - \int_0^x \frac{(1 + e^{-t})'}{1 + e^{-t}} dt \\ &= - \left[\log(1 + e^{-t}) \right]_0^x \\ &= \log \frac{2}{1 + e^{-x}} \\ &= \log \frac{2e^x}{e^x + 1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$