

1.

(1) $b = 0$ ならば, $a + b\sqrt{2} = a$ は有理数である。 $b \neq 0$ のとき $q = a + b\sqrt{2}$ が有理数であるとすれば,

$$\sqrt{2} = \frac{q - a}{b}$$

は有理数となって矛盾するから, $q = a + b\sqrt{2}$ は無理数である。よって, $a + b\sqrt{2}$ が無理数であるための必要十分条件は $b \neq 0$ である。

(証明おわり)

(2) $x \in A$ に対し,

$$x = a + b\sqrt{2}$$

となる有理数 a, b が存在する。 $\sqrt{2}$ が無理数であることより,

$$a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = b = 0$$

であるから, $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$ のとき $a - b\sqrt{2} \neq 0$ でもあり,

$$\frac{1}{x} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{b}{2b^2 - a^2}\sqrt{2}$$

であり, $\frac{a}{a^2 - 2b^2}$ も $\frac{b}{2b^2 - a^2}$ も有理数であるから,

$$\frac{1}{x} \in A$$

である。

(証明おわり)

2.

$$(1) \quad 17x + 15y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の整数解を1つ見つけると。

$$17 = 15 + 2$$

$$15 = 2 \times 7 + 1 = (17 - 15) \times 7 + 1$$

$$\therefore 17 \times (-7) + 15 \times 8 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

\textcircled{1} - \textcircled{2} より

$$17(x + 7) + 15(y - 8) = 0$$

$$\therefore 17(x + 7) = 15(8 - y)$$

17と15は互いに素であるから

$$x + 7 = 15n, \quad 8 - y = 17n$$

を満たす整数 n が定まり,

$$(x, y) = (15n - 7, -17n + 8) \quad (n \text{ は整数}) \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$|x| + |y| = |15n - 7| + |17n - 8| \quad (n \text{ は整数})$$

と表され, $n \leq 0$ のとき

$$|x| + |y| = (7 - 15n) + (8 - 17n) = -32n + 15 \geq 15$$

 $n \geq 1$ のとき

$$|x| + |y| = (15n - 7) + (17n - 8) = 32n - 15 \geq 17$$

であるから, $|x| + |y|$ は

$$n = 0 \text{ のとき最小値 } 15 \quad (\text{答})$$

をとり, そのとき

$$x = -7, \quad y = 8 \quad (\text{答})$$

3.

(1) PはADを1:2に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{1+2} = \frac{2}{3}(1, 0, 0) + \frac{1}{3}(1, 0, 1) \\ &= \left(1, 0, \frac{1}{3}\right) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad (\text{答})$$

QはBFを $t:1-t$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OF} \\ &= (1-t)(0, 1, 0) + t(0, 1, 1) \\ &= (0, 1, t) \\ &= \vec{b} + t\vec{c} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) 点Eが平面OPQ上にあると考えると

$$\overrightarrow{OE} = p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ} \quad (p, q \text{ は実数})$$

と表され、

$$(1, 1, 1) = p\left(1, 0, \frac{1}{3}\right) + q(0, 1, t) = \left(p, q, \frac{1}{3}p + qt\right)$$

成分を比べることにより

$$p = 1, \quad q = 1, \quad \frac{1}{3}p + qt = 1 \quad \therefore t = \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

(3) $t = \frac{2}{3}$ のとき

$$\overrightarrow{OQ} = \left(0, 1, \frac{2}{3}\right)$$

 $\triangle OPQ$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+0+\frac{1}{9}\right) \times \left(0+1+\frac{4}{9}\right) - \left(0+0+\frac{2}{9}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}\sqrt{10 \times 13 - 2^2} \\ &= \frac{\sqrt{126}}{18} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{6} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

4.

(1) C と線分 OA で囲まれた部分の面積を求めて、

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 &= \int_0^2 x(x-2)^2 dx \\
 &= \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 \\
 &= 2^2 \times \left(1 - \frac{8}{3} + 2 \right) \\
 &= \frac{4}{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^t x(x-2)^2 dx - \frac{1}{2} \cdot t \cdot t(t-2)^2 \\
 &= \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 - \frac{1}{2}(t^4 - 4t^3 + 4t^2) \\
 &= -\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) $T = S_2$ のとき, (1), (2) より

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 &= \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 \right) + \left(-\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \right) = \frac{4}{3} \\
 -\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 &= \frac{4}{3} \\
 t^3 - 3t^2 + 2 &= 0 \\
 (t-1)(t^2 - 2t - 2) &= 0
 \end{aligned}$$

 $0 \leq t \leq 2$ において

$$t^2 - 2t - 2 = t(t-2) - 2 < 0$$

であるから、

$$t = 1 \quad (\text{答})$$

1.

$$X = \log_{10} x, \quad Y = \log_{10} y \text{ とおくと,}$$

$$x \geq 100, \quad y \geq 10, \quad xy = 100000$$

のとき

$$X \geq 2, \quad Y \geq 1, \quad X + Y = 5$$

 $z = XY$ について

$$Y = \frac{z}{X}$$

 XY 平面上において, $Y = \frac{z}{X}$ と $Y = -X + 5$ が $X = t$ で接するとき

$$\begin{cases} \frac{z}{t} = -t + 5 & \dots\dots \textcircled{1} \\ -\frac{z}{t^2} = -1 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より

$$\frac{z}{t} = t$$

①より

$$t = -t + 5 \quad \therefore t = \frac{5}{2}$$

接点は

$$(X, Y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

 $2 \leq \frac{5}{2} \leq 4$ より, $z = XY$ は $X = Y = \frac{5}{2}$ のとき最大となり,

$$x = y = 10^{\frac{5}{2}} \text{ のとき最大値 } \frac{25}{4} \quad (\text{答})$$

をとる。

$$(X, Y) = (2, 3) \text{ のとき } XY = 6, \quad (X, Y) = (4, 1) \text{ のとき } XY = 4$$

であるから, $z = XY$ は

$$x = 10^4 = 10000, \quad y = 10 \text{ のとき最小値 } 4 \quad (\text{答})$$

をとる。

2.

(1)

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4} = \frac{2(a_n + 1) - 3}{(a_n + 1) + 3}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n + 1} \text{ とおくととき,}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} - 1 = \frac{2 \cdot \frac{1}{b_n} - 3}{\frac{1}{b_n} + 3} = \frac{2 - 3b_n}{1 + 3b_n}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2 - 3b_n}{1 + 3b_n} + 1 = \frac{(2 - 3b_n) + (3b_n + 1)}{3b_n + 1} = \frac{3}{3b_n + 1}$$

$$\therefore b_{n+1} = b_n + \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

(2) (1)より, $\left\{ \frac{1}{a_n + 1} \right\}$ は初項 $\frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$, 公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n + 1} = 1 + \frac{1}{3}(n - 1) = \frac{n + 2}{3}$$

$$a_n + 1 = \frac{3}{n + 2}$$

$$\therefore a_n = \frac{1 - n}{2 + n} \quad (\text{答})$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{2}{n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \quad (\text{答})$$

3.

$$w = \frac{1}{z} \text{ とおくと}$$

$$z = \frac{1}{w}$$

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \text{ をみたすから}$$

$$\left| \frac{1}{w} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{2-w}{2w} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|w-2|}{|w|} = 1$$

$$\therefore |w| = |w-2| \quad (w \neq 0)$$

$$|w|^2 = |w-2|^2$$

$$w\bar{w} = (w-2)(\bar{w}-2)$$

$$0 = -2(w + \bar{w}) + 4$$

$$\therefore \operatorname{Re}(w) = \frac{w + \bar{w}}{2} = 1$$

よって、点 $\frac{1}{z}$ は複素数平面上で

実部 1 の直線 (答)

をえがく。

(注)

1° $|w| = |w-2|$ の時点で

原点と点 2 から等距離にある点の軌跡

であるとして、実部 1 と答えてもよい。

2° 一般に、方程式

$$\bar{\alpha}(z - \beta) + \alpha(\bar{z} - \bar{\beta}) = 0 \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

は点 β を通り、ベクトル α に垂直な直線を表す。

4.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)^2 dx &= \int_0^{\pi} (x^2 + 2ax \sin x + a^2 \sin^2 x) dx \\ &= a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + 2a \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_0^{\pi} x^2 dx\end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left[x(-\cos x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)^2 dx &= \frac{\pi}{2} a^2 + 2\pi a + \frac{\pi^3}{3} \\ &= \frac{\pi}{2} (a^2 + 4a) + \frac{\pi^3}{3} \\ &= \frac{\pi}{2} (a+2)^2 + \frac{\pi^3}{3} - 2\pi\end{aligned}$$

であり,

$$a = -2 \quad (\text{答})$$

のとき最小値 $\frac{\pi^3}{3} - 2\pi$ をとる。(2) $a = -2$ のとき

$$f(x) = x - 2 \sin x$$

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x$$

 $0 < x < 2\pi$ において

$$f'(x) > 0 \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$

であるから, $f(x)$ の増減は

| | | | | | | |
|---------|---|-----------------|------------------|------------|----|------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5}{3}\pi$ | 2π | | |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | | \searrow | 極小 | \nearrow | 極大 | \searrow |

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}, \quad f(0) < f\left(\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, \quad f(2\pi) = 2\pi, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) < f(2\pi)$$

であることも考えると, $0 \leq x \leq 2\pi$ において

$$\text{最大値 } f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}, \quad \text{最小値 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \quad (\text{答})$$