

17-2〔数〕数学ア(その1)

1. 集合 A は, a, b を有理数として $a + b\sqrt{2}$ の形に表される無理数全体とする。
このとき, 以下の設問に答えよ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい。
- (1) 有理数 a, b に対し, $a + b\sqrt{2}$ が無理数であるための必要十分条件は, $b \neq 0$ である。これを示せ。
- (2) A の要素 x に対し, $\frac{1}{x}$ もまた A の要素であることを示せ。

17-2〔数〕数学ア(その2)

2. 1次不定方程式 $17x + 15y = 1$ について、以下の設問に答えよ。

(1) この方程式の整数解を全て求めよ。

(2) (1) で求めた整数解 x, y に対し、 $|x| + |y|$ の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

17-2〔数〕数学ア(その3)

3. xyz 空間に7点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,0,1)$, $E(1,1,1)$, $F(0,1,1)$ がある。点 P は線分 AD を $1:2$ に内分する点で, 点 Q は線分 BF を $t:1-t$ に内分する点である。このとき, 以下の設問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{OQ} を, それぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , t で表せ。

(2) 4点 O , P , E , Q が同一平面上にあるとき, t の値を求めよ。

(3) 設問(2)で求めた t の値に対して, 三角形 OPQ の面積を求めよ。

17-2〔数〕数学ア(その4)

4. xy 平面において, 原点 O と点 $A(2, 0)$ を結ぶ線分上に点 $P(t, 0)$ がある。曲線 $y = x(x - 2)^2$ を C とし, C 上において x 座標が t である点を Q とする。 C と線分 OA で囲まれた部分のうち, $x \leq t$ である部分の面積を S_1 とし, $x \geq t$ である部分の面積を S_2 とする。このとき, 以下の設問に答えよ。

(1) $S_1 + S_2$ を求めよ。

(2) C と線分 OQ で囲まれた部分の面積を T とするとき, T を t の式で表せ。

(3) $T = S_2$ のとき, t の値を求めよ。

17-2〔数〕数学Ⅰ(その1)

1. x, y は実数で,

$$x \geq 100, y \geq 10, xy = 100000$$

をみたす。このとき, $z = (\log_{10} x)(\log_{10} y)$ の最大値, 最小値と, そのときの x, y の値を求めよ。

17-2〔数〕数学Ⅰ(その2)

2. 数列 $\{a_n\}$ は, 条件

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められている。このとき, 以下の設問に答えよ。

- (1) $b_n = \frac{1}{a_n + 1}$ とおくと, b_{n+1} を b_n で表せ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

17-2〔数〕数学Ⅰ(その3)

3. 複素数 z が $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ かつ $z \neq 0$ をみたしながら動くとき, 点 $\frac{1}{z}$ は複素数平面上でどのような図形をえがくか。

17-2〔数〕数学Ⅰ(その4)

4. a を定数とするとき, 関数 $f(x) = x + a \sin x$ について, 以下の設問に答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\pi} f(x)^2 dx$ が最小となる a の値を求めよ。

(2) (1) で求めた a に対し, $f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における最大値と最小値を求めよ。