

1 (定義と相互関係)

(1) 斜辺の長さ 1 の直角三角形を考えることにより, 鋭角の範囲で

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

であることを導け。

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(i) $\sin \theta = \frac{4}{5}$ のとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

(ii) $\tan \theta = -2$ のとき, $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

2 (余角の公式, 補角の公式)

(1) 角度 $90^\circ - \theta$, $180^\circ - \theta$ に対して,

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad (\text{余角の公式})$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \quad (\text{補角の公式})$$

が成り立つ理由を説明せよ。

(2) $\sin 14^\circ = a$ のとき,

$$\cos 76^\circ, \quad \cos 104^\circ, \quad \sin 166^\circ$$

の値をそれぞれ a で表せ。

3 (三角方程式)

 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値を求めよ。
- (2) 方程式 $5 \sin \theta + 2 \cos^2 \theta - 4 = 0$ を解け。
- (3) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin \theta$ の値を求めよ。

4 (三角不等式)

 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において, 次の不等式を解け。

- (1) $\sin \theta < \frac{1}{2}$
- (2) $\sin \theta > \cos 50^\circ$
- (3) $-1 < \tan \theta < 1$

5 (正弦定理)

$\triangle ABC$ は $BC = \sqrt{6}$, $CA = 2$, $\angle A = 120^\circ$ を満たしている。

- (1) $\angle B$, $\angle C$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の外接円の半径 R を求めよ。

6 (余弦定理)

$\triangle ABC$ は $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle A = 60^\circ$ を満たしている。

- (1) 辺 BC の長さを求めよ。
- (2) $\sin C$ の値を求めよ。

7 (面積公式, 内接円の半径)

$\triangle ABC$ は $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle A = 60^\circ$ を満たしている。

- (1) $\triangle ABC$ の面積 S_1 を求めよ。
- (2) 辺 AB 上にある点 P は辺 AB を $3 : 2$ に分け, 辺 BC 上にある点 Q は辺 BC を $3 : 4$ に分ける。 $\triangle PBQ$ の面積を S_2 とするとき, 面積比 $S_1 : S_2$ を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を求めよ。
- (4) 円に内接する四角形 $KLMN$ の各辺の長さが $KL = 3$, $LM = 4$, $MN = 6$, $NK = 5$ であるとき, 面積比 $\triangle KLN : \triangle LMN$ を求めよ。

8 (正弦定理と余弦定理の本質的役割)

- (1) $\triangle ABC$ において $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$ とするとき, $\sin A$ の値を求めよ。
- (2) $AB = 2\sqrt{7}$, $BC = 10$, $C = 30^\circ$ のとき, 辺 CA の長さを求めよ。

9 (条件の連立)

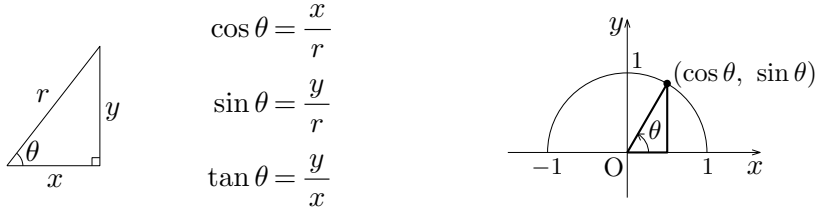
- (1) 円に内接する四角形 $ABCD$ の各辺の長さが $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 6$, $DA = 5$ であるとき, 対角線 BD の長さおよび $\cos A$ の値を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ は $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$ を満たし, 辺 BC 上の点 D は辺 BC を $1:2$ に分けるとき, 線分 AD の長さを求めよ。

10 (三角形の形状)

次の式を満たす $\triangle ABC$ の形状を答えよ。ただし, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とする。

- (1) $a \cos A = b \cos B$
- (2) $2 \sin C \cos B = \sin A - \sin B + \sin C$

1 確認：一つの内角が $\theta (\neq 90^\circ)$ であるすべての直角三角形は相似なので，その角度 θ と三角形の二辺の比との対応を考えることには意味がある。そこで，その比に $\sin(e)$, $\cos(in e)$, $\tan(gent)$ と名前をつけて，次のように定義する。



$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

頭文字 s, c, t の筆記体での書き順で「*分の*」とみると覚えやすい。

(1)で示すように

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

が成り立つから，単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上で点 $(1, 0)$ から反時計まわりに θ だけ回転した点の座標が $(\cos \theta, \sin \theta)$ ，その点と原点とを結ぶ直線の傾きが $\tan \theta$ であると再定義することにより，(数学 I の範囲では) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲に拡張できる。

上の関係式から

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

が導かれる。計算過程を確認した上で覚えておこう。

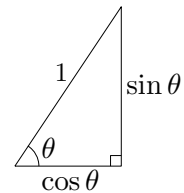
解答：

(1) ひとつの内角を θ とする直角三角形の斜辺の長さを 1 とすると，定義より直角をはさむ 2 辺の長さは $\cos \theta, \sin \theta$ であるから，三平方の定理より

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

\tan の定義から

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



(おわり)

(2)(i) $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \quad \therefore \cos \theta = \pm \frac{3}{5} \quad (\text{答})$$

(ii) 公式 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}$$

$\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = -2 \cos \theta \geq 0$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) より

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} (< 0), \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

□2 確認：角度 θ に対して， $90^\circ - \theta$ を余角， $180^\circ - \theta$ を補角という。□1 で確認した定義に基づいて点 $(\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta))$ ， $(\sin(180^\circ - \theta), \cos(180^\circ - \theta))$ の位置を考えることにより，(1)では

$$\text{余角の公式：} \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{補角の公式：} \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

が成り立つことを確認し，(2)では公式を使ってみることにする。

解答：

(1) 単位円周上において，点 $(1, 0)$ から反時計まわりに θ だけ回転するとき， $90^\circ - \theta$ は 90° に対応する点 $(0, 1)$ から時計まわりに θ だけ回転することを表すから，

$$(\cos \theta, \sin \theta) \text{ と } (\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta)) \text{ は } y = x \text{ に関して対称}$$

である。したがって，

$$(\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta)) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

また， $180^\circ - \theta$ は 180° に対応する点 $(-1, 0)$ から時計まわりに θ だけ回転することを表すから，

$$(\cos \theta, \sin \theta) \text{ と } (\cos(180^\circ - \theta), \sin(180^\circ - \theta)) \text{ は } y \text{ 軸に関して対称}$$

であり，

$$(\cos(180^\circ - \theta), \sin(180^\circ - \theta)) = (-\cos \theta, \sin \theta) \quad (\text{おわり})$$

(2) 余角の公式より

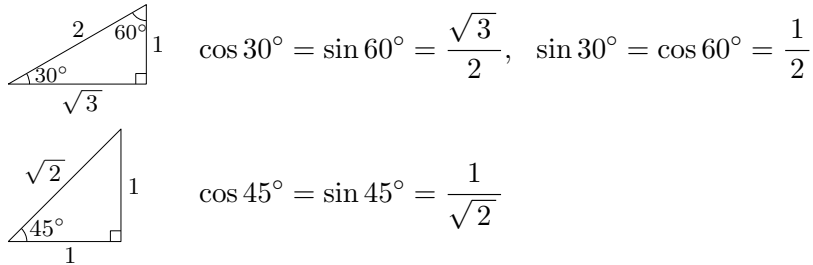
$$\cos 76^\circ = \cos(90^\circ - 14^\circ) = \sin 14^\circ = a \quad (\text{答})$$

補角の公式より

$$\cos 104^\circ = \cos(180^\circ - 76^\circ) = -\cos 76^\circ = -a \quad (\text{答})$$

$$\sin 166^\circ = \sin(180^\circ - 14^\circ) = \sin 14^\circ = a \quad (\text{答})$$

3 確認：角度および三角比の値は，定義からだけでは一般には求められないが， 30° ， 45° ， 60° の場合は図をかけば値が求められる。



単位円による定義と組み合わせれば， 120° ， 135° ， 150° に対する三角比の値も求められる。また， 0° ， 90° ， 180° に対する三角比は，定義から直接求められる。以上に登場した 30° または 45° の整数倍にあたる角度は，有名角と呼ばれる。有名角に対する三角比を（ \tan も含めて）覚えておくと，手際よく問題が解決できる。

三角比についての方程式を解法は，公式 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を用いて $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ の一方だけで表された方程式を解き，その上で θ を求めるという 2 段階で処理するのが基本である。また，公式 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を用いて， $\tan \theta$ で整理するのも有効である。

解答：

(1) 有名角についての知識より

$$\theta = 60^\circ \text{ または } 120^\circ \quad (\text{答})$$

(2) 公式 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より

$$5 \sin \theta + 2(1 - \sin^2 \theta) - 4 = 0$$

$$2 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta + 2 = 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) = 0$$

($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ では) $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 30^\circ \text{ または } 150^\circ \quad (\text{答})$$

(3) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ ， $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ から $\cos \theta$ を消去して，

$$\left(\frac{1}{3} - \sin \theta\right)^2 + \sin^2 \theta = 1$$

$$2 \sin^2 \theta - \frac{2}{3} \sin \theta - \frac{8}{9} = 0$$

$$\therefore 9 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 4 = 0$$

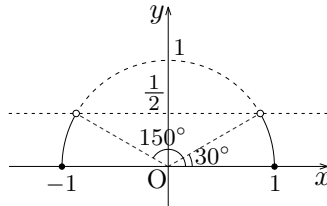
2 次方程式の解の公式および $\sin \theta > 0$ より

$$\sin \theta = \frac{3 + \sqrt{3^2 + 4 \times 9 \times 4}}{18} = \frac{1 + \sqrt{17}}{6} \quad (\text{答})$$

4 確認：不等式の境界の値は 3 のように三角方程式を解けばよいが，問題はその値を境にしてどちら側が不等式の解なのかということである。そこで，定義に基づいて，角度の変化に対する単位円周上の点の動きを考えることで解決する。tan の不等式の場合は，直線 $x = 1$ 上の点 $(1, \tan \theta)$ の動きを考える。

解答：

(1) $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin \theta < \frac{1}{2}$ を満たす円周上の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で考えて



$$\begin{cases} 0^\circ \leq \theta < 30^\circ \\ \text{または} \\ 150^\circ < \theta \leq 180^\circ \end{cases} \quad (\text{答})$$

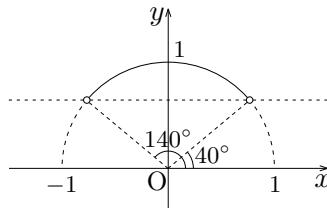
(2) 余角の公式，補角の公式より

$$\cos 50^\circ = \sin 40^\circ = \sin 140^\circ$$

であることに注意して，

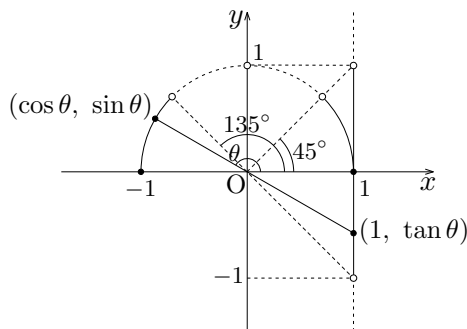
$$x^2 + y^2 = 1, \quad y > \sin 40^\circ = \sin 140^\circ$$

を満たす円周上の範囲を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で考えて



$$40^\circ < \theta < 140^\circ \quad (\text{答})$$

(3) $-1 < \tan \theta < 1$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ を満たす範囲を図から読みとって，



$$0^\circ \leq \theta < 45^\circ \quad \text{または} \quad 135^\circ < \theta \leq 180^\circ \quad (\text{答})$$

5 確認：三角形 ABC の各辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とし，外接円の半径を R とするとき，

$$\text{正弦定理：} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ。これは，次のように円周角の性質から導かれる。

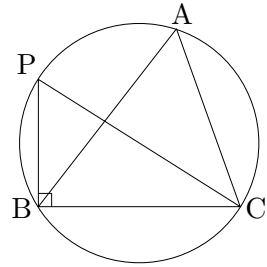
1° $\angle A$ が鋭角のとき

外接円上で弦 BC に関して点 A と同じ側に点 P を CP が直径になるようにとることができて，円周角の性質より

$$\angle BAC = \angle BPC, \quad \angle PBC = 90^\circ$$

が成り立つから，

$$\sin A = \sin \angle BPC = \frac{BC}{CP} = \frac{a}{2R}$$



2° $\angle A$ が直角のとき

辺 BC は外接円の直径 ($a = 2R$) であるから

$$\sin A = 1 = \frac{a}{2R}$$

3° $\angle A$ が鈍角のとき

外接円上で弦 BC に関して点 A と反対側に点 Q をとると， $\angle BQC$ は鋭角であるから，1° より

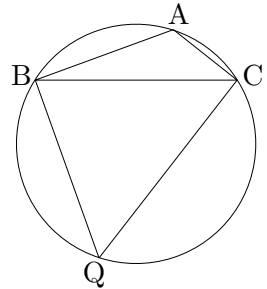
$$\sin \angle BQC = \frac{a}{2R}$$

円に内接する四角形 ABQC について

$$\angle BAC + \angle BQC = 180^\circ$$

が成り立つから，補角の公式より

$$\sin A = \sin \angle BAC = \sin \angle BQC = \frac{a}{2R}$$



以上の議論は，他の内角 B , C にもあてはまる。

解答：

(1) 正弦定理より

$$\frac{2}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} \quad \therefore \sin B = \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって， $\angle B = 45^\circ$ または 135° であるが， $\angle A = 120^\circ$ より

$$\angle B + \angle C = 60^\circ$$

であるから，

$$\angle B = 45^\circ, \quad \angle C = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ \quad (\text{答})$$

(2) 正弦定理より， $\triangle ABC$ の外接円の半径 R は

$$R = \frac{\sqrt{6}}{2 \sin 120^\circ} = \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

6 確認：三角形 ABC の各辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とすると,

$$\text{余弦定理：} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

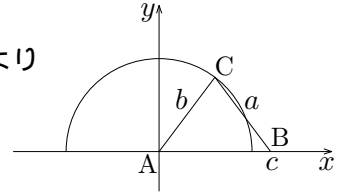
が成り立つ。証明方法はいろいろあるが、例えば次のように考えればよい。

座標平面上で $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ とし、点 C の y 座標が正となるように $\triangle ABC$ をおく。三角比の定義より

$$C(b \cos A, b \sin A)$$

であるから、三平方の定理(もしくは2点間の距離公式)より

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$



他の2式も同様である。

余弦定理の式を余弦(\cos)について解き直して

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

の形でも覚えておこう。いずれの表記にせよ、その場の図形にあわせて適用できることが大切である。

解答：

(1) 余弦定理より

$$BC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49$$

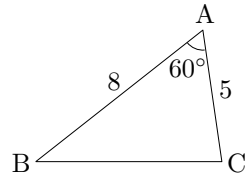
$$\therefore BC = 7 \quad (\text{答})$$

(2) 余弦定理より

$$\cos C = \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{1}{7}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1, \quad \sin C > 0 \text{ より}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad (\text{答})$$



7 確認：三角形 ABC において，辺 AC を底辺とみると高さは $AB \sin A = c \sin A$ であるから，三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

である。他の内角についても同様に

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

この面積公式は，三角形の 2 辺の長さの積 (\rightarrow (2), (4)) や四角形の対角線の長さの積と結びつくという点でも重要である。

解答：

(1) 面積公式より

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(2) $BC = a$ とおくと

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a \sin B = 4a \sin B$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \times 8\right) \cdot \frac{3}{7}a \cdot \sin B = \frac{24}{35}a \sin B$$

であるから，求める面積比は

$$S_1 : S_2 = 4 : \frac{24}{35} = 35 : 6 \quad (\text{答})$$

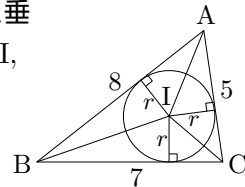
(3) 余弦定理より

$$BC = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ} = 7$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径 r は，内心 I から各辺におろした垂線の長さである。そこで， $\triangle ABC$ を 3 つの三角形 $\triangle ABI$ ， $\triangle BCI$ ， $\triangle CAI$ に分割して，面積を 2 通りに表すと

$$10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r$$

$$\therefore r = \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

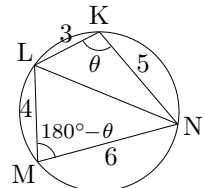


(4) $\angle LKN = \theta$ とおくと，円に内接する四角形の性質より $\angle LMN = 180^\circ - \theta$ となるから，補角の公式より

$$\sin \angle LMN = \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta = \sin \angle LKN$$

よって，求める面積比は

$$\begin{aligned} \triangle KLN : \triangle LMN &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin \theta : \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin \theta \\ &= 5 : 8 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



8 確認：正弦定理，余弦定理そのものは，既に 5，6 で確認しているが，あらためて使い方について確認する。

正弦定理，余弦定理の式

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

を眺めてみると，いずれも 4 つの未知数についての関係式であることがわかる。実は，正弦(sin)が入っているか余弦(cos)が入っているかは本質ではなく，

仮定された 3 つの数と問われている 1 つの数が何か

ということが問題なのである。

もう一つの注意点は，比例関係である。正弦定理は比例式そのもので

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

であることを表している。また，余弦定理は同次式であり，相似な三角形の内角が等しいことを数式で表現した形になっている。例外的な扱い方として，正弦定理から三角形の外接円の半径を求めることができ，余弦定理から三角形の内角の鋭角，鈍角を判定することができる。

以上より，解法パターンをまとめると

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ 組の向かい合う辺と角(三角比)の関係} \\ 3 \text{ 辺の長さの比そのものが問われている} \\ \text{外接円の半径(または直径)というキーワード} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{正弦定理}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ 辺の長さ(の比)と 1 つの角(三角比)の関係} \\ \text{鋭角, 鈍角の判定} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{余弦定理}$$

解答：

(1) $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおくと, 正弦定理より

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$$

であるから,

$$a = 4k, b = 5k, c = 6k \quad (k \text{ は正の数})$$

と表される。余弦定理より

$$\cos A = \frac{25k^2 + 36k^2 - 16k^2}{2 \cdot 5k \cdot 6k} = \frac{45}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$

公式 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\sin \theta > 0$ より

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (\text{答})$$

(2) 辺 CA の長さを x とおいて, 余弦定理をあてはめると

$$(2\sqrt{7})^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ$$

$$x^2 - 10\sqrt{3}x + 72 = 0$$

$$(x - 4\sqrt{3})(x - 6\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = 4\sqrt{3} \text{ または } 6\sqrt{3}$$

$x = 4\sqrt{3}$ について

$$4\sqrt{3} < 2\sqrt{7} < 10, \quad 10 < 4\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$$

$x = 6\sqrt{3}$ について

$$2\sqrt{7} < 10 < 6\sqrt{3}, \quad 6\sqrt{3} < 2\sqrt{7} + 10$$

であるから, どちらの値も題意に適するので

$$CA = 4\sqrt{3}, 6\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(注) 二辺の長さの一つの三角比が与えられれば, 余弦定理から残り一辺の長さが求められるが, 本問のように(二辺とはさむ角ではなく)合同条件が崩れている場合は, 図形の存在を確かめなければならない。その場合は, 三角形の成立条件(三角不等式)を確かめればよい。辺の長さの候補として得られた数値が負であれば, 三角不等式を確かめるまでもなく排除できる。

9 確認：前問 8 で正弦定理，余弦定理を使いこなすための原理を確認したが，本問の場合は $\triangle ABD$ も $\triangle BCD$ も条件が一つ不足し，原則通りには解けないかに見える。ところが，一つずつの不足を連立させて補うことにより，その事態が解決できる。

(1)では $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

(2)では $\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$

に注目して，補角の公式と結びつけることにより，

(1)では BD と $\cos A$ との連立方程式

(2)では AD と $\cos \angle ADB$ (もしくは $\cos \angle ADC$) との連立方程式

として条件をとらえる。このように深い洞察にもとづく考え方であるにもかかわらず，学校では典型的解法として軽く流されてしまうので，知ってる割には解けないという人が意外に多い。ここで，本質をしっかりとつかまえておきたい。

解答：

(1) $\triangle ABD$ に余弦定理をあてはめると

$$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos A \quad \dots\dots ①$$

$\triangle BCD$ に余弦定理をあてはめると

$$BD^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos C \quad \dots\dots ②$$

円に内接する四角形の性質(円周角)より

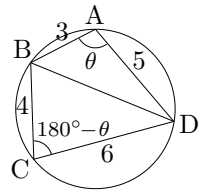
$$A + C = 180^\circ$$

であるから，補角の公式より

$$\cos C = -\cos A \quad \dots\dots ③$$

連立方程式①，②，③を解いて

$$BD = 2\sqrt{\frac{133}{13}}, \quad \cos A = -\frac{3}{13} \quad (\text{答})$$



(2) $AD = x$ ， $\angle ADB = \theta$ とおく。

$\triangle ABD$ に余弦定理をあてはめると

$$\frac{x^2 + 4 - 25}{2 \cdot 2 \cdot x} = \cos \theta$$

$\triangle ADC$ に余弦定理をあてはめると

$$\frac{x^2 + 16 - 49}{2 \cdot 4 \cdot x} = \cos(180^\circ - \theta)$$

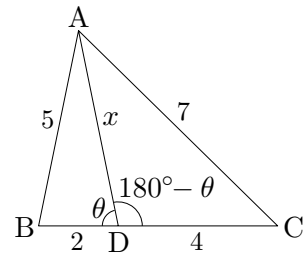
補角の公式より $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ であるから，

$$\frac{x^2 + 16 - 49}{2 \cdot 4 \cdot x} = -\frac{x^2 + 4 - 25}{2 \cdot 2 \cdot x}$$

$$x^2 - 33 + 2(x^2 - 21) = 0$$

$$\therefore x^2 = 25$$

$$\therefore x = AD = 5 \quad (\text{答})$$



(注) $|5 - 2| < 5 < 5 + 2$ ， $|7 - 4| < 5 < 7 + 4$ より必要十分である。

10 確認：三角形の形状決定問題では，提示された条件式を辺の長さ，角度(三角比)のいずれか一方だけにまずそろえることが先決である。ただ，数学 I の範囲では加法定理が使えないので，辺の長さにそろえる場合が圧倒的に多い。

余弦定理

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

により余弦(cos)の値は辺の長さだけで表せるが，正弦定理

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

を用いると，どうしても外接円の半径 R が混ざることには注意する。ヘロンの公式を導くときのように $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて正弦(sin)と余弦定理を結びつけることもあるが，(2)のように

正弦(sin)について同次式であれば外接円の半径が約せる

という着眼が重要である。なお，ヘロンの公式は学校で取り上げるほどには役に立たないので，本ファイルでは演習として取り上げていない。

条件式を辺の長さだけで表したあとも油断してはいけない。案外，因数分解や論理(「または」と「かつ」)でひっかかることも多いからである。

解答：

(1) 仮定および余弦定理より

$$a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^4 - b^4 - c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a + b)(a - b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ または } a^2 + b^2 = c^2$$

よって， $\triangle ABC$ は

BC = CA なる二等辺三角形 または $\angle C$ を直角とする直角三角形 (答)

(2) 仮定および正弦定理，余弦定理より

$$2 \cdot \frac{c}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{a}{2R} - \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \quad (R \text{ は外接円の半径})$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = a(a - b + c)$$

$$b^2 - c^2 - a(b - c) = 0$$

$$(b - c)(b + c - a) = 0$$

三角不等式(三角形の成立条件)より $b + c > a$ であるから， $\triangle ABC$ は

AB = AC なる二等辺三角形 (答)