

1

(1) 題意の方程式は

$$|x-1| = a(x-k) - k^2 + 2$$

であるから,  $xy$  平面上で  $y = |x-1|$  のグラフと直線  $y = a(x-k) - k^2 + 2$  が  $a$  によらず共有点をもつと考えると,

$$|k-1| \leq -k^2 + 2$$

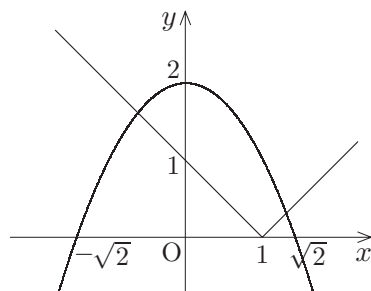
$k$  の最大値  $M$  は,

$$0 \leq M-1 = -M^2 + 2$$

より

$$M^2 + M - 3 = 0 \quad \text{かつ} \quad M \geq 1$$

$$\therefore M = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \quad (\text{ア})$$

(2)  $a^2 = b^n + 225$  より

$$b^n = a^2 - 225 = (a+15)(a-15)$$

$b$  は素数であるから, 非負整数  $x, y$  を用いて

$$a+15 = b^x, \quad a-15 = b^y \quad (x+y=n, \quad x>y) \quad \dots\dots (*)$$

と表される。2式の差をとると

$$30 = b^x - b^y = b^y(b^{x-y} - 1)$$

$b$  は素数で,  $30 = 2 \times 3 \times 5$  であるから

$$(b^y, b^{x-y} - 1) = (2, 15), (3, 10), (5, 6)$$

$10+1$  は3で割り切れず,  $6+1$  は5で割り切れないから,

$$b^y = 2, \quad b^{x-y} = 16 = 2^4$$

に限られ,

$$b = 2, \quad y = 1, \quad x = 5$$

(\*)より  $a, n$  も求めて

$$(a, b, n) = (17, 2, 6) \quad (\text{イ})$$

(3)  $P(x)$  を  $n$  次式 ( $n \geq 1$ ) であるとすれば,

$$\int_0^x \{P(t)\}^m dt = P(x^3) - P(0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

において次数を比べると

$$mn + 1 = 3n \quad \therefore n(3-m) = 1$$

$n$  も  $3-m$  も正の整数であるから

$$n = 3-m = 1 \quad \therefore m = 2$$

よって,

$$P(x) = ax + b \quad (a, b \text{ は定数}, a \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

とおくことができ、 $\textcircled{1}$ は

$$\int_0^x (at + b)^2 dt = ax^3$$

両辺を  $x$  で微分すると

$$\begin{aligned} (ax + b)^2 &= 3ax^2 \\ \therefore a^2x^2 + 2abx + b^2 &= 3ax^2 \end{aligned}$$

係数を比べると

$$a^2 = 3a, \quad 2ab = b^2 = 0$$

$a \neq 0$  より

$$a = 3, \quad b = 0$$

$\textcircled{2}$ に代入して

$$P(x) = \boxed{3x} \quad (\text{ウ})$$

(4)  $f(-x) = -f(x)$ ,  $f(1+x) = f(1-x)$  が成り立つことを用いると

$$f(x+2) = f(1+1+x) = f(1-1-x) = f(-x) = -f(x)$$

$$f(x+4) = f(x+2+2) = -f(x+2) = -\{-f(x)\} = f(x)$$

$f(x+m) = f(x)$  を満たす最小正の整数  $m$  は 4 の約数であり, 4 でないとすれば

$$m = 1, 2$$

に限られるが,  $f(x)$  は定数関数でなく, 特に

$$f(x) \neq 0$$

であるから,

$$f(x+2) = -f(x) \neq f(x)$$

$f(x+1) = f(x)$  が成り立つとすれば,

$$f(x) = f(1+x) = f(1-x) = f(-x) = -f(x)$$

となって矛盾する。

以上の考察より,  $f(x+m) = f(x)$  を満たす最小正の整数  $m$  は

$$m = \boxed{4} \quad (\text{エ})$$

2

(1)  $f(x) = 2x - [2x]$  とおくと

$$a_{k+1}(x) = f(a_k(x))$$

であり,

$$f\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6} - \left[\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \left[\frac{4}{3}\right] = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

より

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{8}{12} \notin S_{12}$$

である。

$$f\left(\frac{3}{12}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - [1] = 0$$

より

$$\frac{3}{12}, \frac{6}{12} \in S_{12}$$

である。

$$f\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{6} - \left[\frac{5}{6}\right] = \frac{5}{6}$$

$$f\left(\frac{10}{12}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{3} - \left[\frac{5}{3}\right] = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{7}{6} - \left[\frac{7}{6}\right] = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}, \quad f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11}{6} - \left[\frac{11}{6}\right] = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6}$$

より

$$\frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12} \notin S_{12}$$

である。

$$f\left(\frac{9}{12}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

より

$$\frac{9}{12} \in S_{12}$$

以上より,

$$S_{12} = \left\{ \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12} \right\} \quad (\text{答})$$

(2) (1)の考察より, (整数部分の整数倍は整数になることも考えて)

$$a_k(x) = 2^{k-1}a_1(x) - [2^{k-1}a_1(x)] = (2^{k-1}a_1(x) \text{ の小数部分})$$

であることがわかるから,  $\frac{i}{n}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) が  $S_n$  に属するための条件は

$$2^k \cdot \frac{i}{n} \text{ が整数となるような正の整数 } k \text{ が存在する}$$

ことである。したがって,

$$n \text{ が奇数のとき } S_n = \emptyset$$

$$2^k \mid n, 2^{k+1} \nmid n \text{ のとき } S_n = S_{2^k}$$

である。

$$2^{10} \leq 2018 < 2^{11}$$

であり, 1 以上 10 以下の整数  $k$  に対して

$$S_{2^k} = \left\{ \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \frac{4}{2^k}, \dots, \frac{2^k-1}{2^k} \right\}$$

であるから,  $T$  の要素の個数は

$$\sum_{k=1}^{10} \{2^k - 1 - (2^{k-1} - 1)\} = \sum_{k=1}^{10} 2^{k-1} = 2^{10} - 1 = 1023 \text{ 個} \quad (\text{答})$$

である。

3

$$a_1 = i, \quad a_2 = j, \quad a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により数列  $\{a_n\}$  を定め,

$$r(n) \equiv a_n \pmod{9}, \quad 1 \leq r(n) \leq 9$$

とすると,

$$A_n = P_{r(n)}$$

(1)  $a_1 = r(1) = 1, \quad a_2 = r(2) = 2$  のとき

$$a_3 = 2 \times 1 - 2 = 0, \quad r(3) = 9$$

$$a_4 = 2 \times 2 - 0 = 4, \quad r(4) = 4$$

$$a_5 = 2 \times 0 - 4 = -4 \equiv 5 \pmod{9}, \quad r(5) = 5$$

$$a_6 \equiv 2 \times 4 - 5 \equiv 3 \pmod{9}, \quad r(6) = 3$$

$$a_7 \equiv 2 \times 5 - 3 \equiv 7 \pmod{9}, \quad r(7) = 7$$

$$a_8 \equiv 2 \times 3 - 7 \equiv -1 \equiv 8 \pmod{9}, \quad r(8) = 8$$

$$a_9 \equiv 2 \times 7 - 8 \equiv 6 \pmod{9}, \quad r(9) = 6$$

$$a_{10} \equiv 2 \times 8 - 6 \equiv 1 \pmod{9}, \quad r(10) = 1$$

$$a_{11} \equiv 2 \times 6 - 1 \equiv 2 \pmod{9}, \quad r(11) = 2$$

よって,  $r(n+9) = r(n)$  が成り立つから,  $A_{15} = P_k$  を満たす  $k$  は

$$k = r(15) = r(6) = 3 \quad (\text{答})$$

(2)  $r(1) = 1, r(2) = 2$  の場合だけでなく, 一般に

$$r(n+9) = r(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。というのは,

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$$

$$a_{n+3} = -a_{n+2} + 2a_{n+1} = -(-a_{n+1} + 2a_n) + 2a_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

$$a_{n+4} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(-a_{n+1} + 2a_n) - 2a_{n+1} = -5a_{n+1} + 6a_n$$

$$a_{n+5} = -a_{n+4} + 2a_{n+3}$$

$$= -(-5a_{n+1} + 6a_n) + 2(3a_{n+1} - 2a_n)$$

$$= 11a_{n+1} - 10a_n \equiv 2a_{n+1} - a_n \pmod{9}$$

$$a_{n+9} \equiv 2a_{n+5} - a_{n+4}$$

$$\equiv 2(2a_{n+1} - a_n) - (-5a_{n+1} + 6a_n)$$

$$\equiv 9a_{n+1} - 8a_n$$

$$\equiv a_n \pmod{9}$$

だからである。

よって, 9 の正の約数は 1, 3, 9 のいずれかであり,  $r(1) \neq r(2)$  より

$$\{r(n)\} \text{ の周期は } 3 \text{ または } 9$$

周期が 9 のときは,  $r(n) = 1$  ( $A_n = P_1$ ) となる正の整数  $n$  は必ず存在するから, 条件

を満たすには

$\{r(n)\}$ の周期は3

でなければならない。このとき,

$$a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n \equiv a_n \pmod{9}$$

より

$$3a_{n+1} \equiv 3a_n \pmod{9}$$

$$\therefore a_{n+1} \equiv a_n \pmod{3}$$

したがって, すべての正の整数  $n$  に対して  $A_n \neq P_1$  となるのは,

$$\{A_1, A_2, A_3\} = \{P_2, P_5, P_8\} \text{ または } \{P_3, P_6, P_9\}$$

のときであるから, 組  $(A_1, A_2)$  の個数は

$${}_3P_2 \times 2 = 12 \text{ 個 (答)}$$

である。