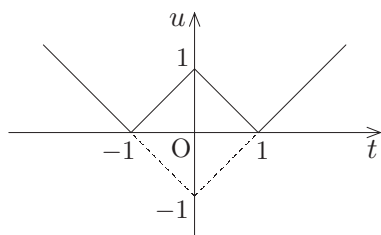


1

(1) $u = ||t| - 1|$ のグラフは

であるから, これを参考にして定積分を台形または三角形の面積と考えると,
 $x \leq -2$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{-(x-1) - 1 - (x+1) - 1\} \cdot 2 = -x - 1$$

$-2 \leq x \leq -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \{-1 - (x-1)\}^2 + \frac{1}{2} (x+1+1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + x + 1 = \frac{1}{2} (x+1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$-1 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) = f(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

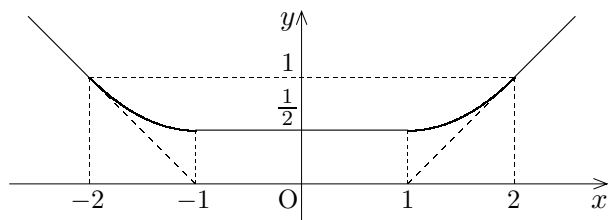
$1 \leq x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \{1 - (x-1)\}^2 + \frac{1}{2} (x+1-1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} x^2 - x + 1 = \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x \geq 2$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{(x-1) - 1 + (x+1) - 1\} \cdot 2 = x - 1$$

以上より, $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



$y = f(x)$ と $y = 1$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \int_1^2 \left\{ f(x) - \frac{1}{2} \right\} dx \right) \\
 &= 2 - \int_1^2 (x-1)^2 dx \\
 &= 2 - \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^2 = \boxed{\frac{5}{3}} \\
 &\hspace{10em} (\mathcal{A})
 \end{aligned}$$

(2) 1と3を解に持つことより, x の恒等式

$$\begin{aligned}
 x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 &= (x-1)(x-3)(x^2 + dx + 1) \quad (d \text{は定数}) \\
 &= (x^2 - 4x + 3)(x^2 + dx + 1) \\
 &= x^4 + (d-4)x^3 + (4-4d)x^2 + (3d-4)x + 3
 \end{aligned}$$

が成り立ち, 係数を比べると

$$a = d - 4, \quad b = 4 - 4d, \quad c = 3d - 4$$

(i) $x^2 + dx + 1 = 0$ が1または3のみを解に持つのは

$$x^2 + dx + 1 = (x-1)^2$$

のときだけであり,

$$d = -2 \quad (a, b, c \text{が整数であることも満たす})$$

(ii) $x^2 + dx + 1 = 0$ が実数解を持たないとき

$$(\text{判別式}) = d^2 - 4 < 0 \quad \therefore -2 < d < 2$$

$a = d - 4$ は整数であるから d も整数であり,

$$d = -1, 0, 1$$

(i), (ii)より

$$d = -2, -1, 0, 1$$

$a = d - 4$ より

$$a \text{の最大値は } \boxed{-3}, \text{ 最小値は } \boxed{-6}$$

(イ) (ウ)

(3) 三角形ABCの面積を2通りに表すと

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot OP + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot OQ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot OR = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$$

$$\therefore 3OP + 4OQ + 5OR = 12$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(3OP + 4OQ + 5OR)^2 \leq (3^2 + 4^2 + 5^2)(OP^2 + OQ^2 + OR^2)$$

$$\therefore OP^2 + OQ^2 + OR^2 \geq \frac{12^2}{3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{144}{50} = \frac{72}{25}$$

ここで, 不等式の等号は

$$OP : OQ : OR = 3 : 4 : 5 \text{ かつ } 3OP + 4OQ + 5OR = 12$$

すなわち

$$OP = \frac{18}{25}, \quad OQ = \frac{24}{25}, \quad OR = \boxed{\frac{6}{5}}$$

(エ)

のとき成り立つから,

$$OP^2 + OQ^2 + OR^2 \text{ の最小値は } \frac{72}{25}$$

である。

(4)

$$(*) \iff \text{すべての整数 } n \text{ に対して, } 10^{-k} 2^n \geq 1 \text{ または } 10^{100} 3^{-n} \geq 1$$

$$\iff \text{すべての整数 } n \text{ に対して, } 10^k \leq 2^n \text{ または } 3^n \leq 10^{100}$$

ここで,

$$10^k \leq 2^n \iff \log_{10} 10^k \leq \log_{10} 2^n$$

$$\iff k \leq n \log_{10} 2$$

$$\iff n \geq \frac{k}{\log_{10} 2}$$

$$3^n \leq 10^{100} \iff \log_{10} 3^n \leq \log_{10} 10^{100}$$

$$\iff n \log_{10} 3 \leq 100$$

$$\iff n \leq \frac{100}{\log_{10} 3} = \frac{100}{0.4771} = 209.5 \dots$$

であるから,

$$(*) \iff 210 \geq \frac{k}{\log_{10} 2}$$

$$\iff k \leq 210 \log_{10} 2 = 210 \times 0.3010 = 63.21$$

よって, 条件(*)を満たす整数 k の最大値は $\boxed{63}$ である。

(オ)

2

$$(1) \quad [\sqrt[3]{n}] = 2 \iff 2 \leq \sqrt[3]{n} < 3 \iff 8 \leq n < 27$$

であり, $4 (= 2^2)$ の倍数であるものは

$$n = 8, 12, 16, 20, 24 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad [\sqrt[3]{n}] = k \iff k \leq \sqrt[3]{n} < k+1 \iff k^3 \leq n < (k+1)^3$$

$$(k+1)^3 = k^2(k+3) + 3k+1$$

$k \geq 4$ のとき

$$k^2 - (3k+1) = k(k-3) - 1 > 0$$

であるから, $p_n^2 = k^2$ の倍数であるものは

$$k^3, k^2(k+1), k^2(k+2), k^2(k+3)$$

$(k+1)^3 \leq 10^6$ となるのは

$$k+1 \leq 10^2 \quad \therefore 4 \leq k \leq 99$$

$k = 1$ のとき

$$[\sqrt[3]{n}] = 1 \iff 1 \leq n < 2^3$$

$k = 2$ のときは (1) の通りであり, $k = 3$ のとき

$$[\sqrt[3]{n}] = 3 \iff 27 \leq n < 64$$

$$9 (= 3^2) \text{ の倍数は } 27, 36, 45, 54, 63$$

$n = 10^6$ のとき

$$[\sqrt[3]{n}] = 10^2, \quad 10^6 \text{ は } 10^4 \text{ の倍数}$$

以上をまとめて, 10^6 以下の正の整数 n で, p_n^2 の倍数であるものの個数は

$$7 + 5 + 5 + 4 \times (99 - 3) + 1 = 402 \text{ 個} \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad 1 \leq n < 2^3 \text{ のとき, } p_n = 1, p_n(p_n + 1) = 2 \text{ であるから}$$

$$q_1 = q_3 = q_5 = q_7 = 1, \quad q_2 = q_4 = q_6 = 0$$

$2^3 \leq n < 3^3$ のとき

$$p_n(p_n + 1) = 2 \times 3 = 6$$

$$q_8 = 2, \quad q_{12} = 0, \quad q_{16} = 4, \quad q_{20} = 2, \quad q_{24} = 0$$

$3^3 \leq n < 4^3$ のとき

$$p_n(p_n + 1) = 3 \times 4 = 12$$

$$q_{27} = 3, \quad q_{36} = 0, \quad q_{45} = 9, \quad q_{54} = 6, \quad q_{63} = 3$$

$[\sqrt[3]{n}] = k$ ($4 \leq k \leq 99$) のとき

$$k^3 = k(k+1) \cdot (k-1) + k$$

$$k^2(k+1) = k(k+1) \cdot k + 0$$

$$k^2(k+2) = k(k+1) \cdot k + k^2$$

$$k^2(k+3) = k(k+1) \cdot (k+1) + k^2 - k$$

$n = 10^6$ のとき

$$10^6 = 10^2(10^2 + 1) \cdot (10^2 - 1) + 10^2$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{10^6} q_k \\ &= (1 + 1 + 1 + 1) + (2 + 4 + 2) + (3 + 9 + 6 + 3) \\ &\quad + \sum_{k=4}^{99} (k + 0 + k^2 + k^2 - k) + 10^2 \\ &= 4 + 8 + 21 + 2 \times \frac{1}{6} \times 99 \times 100 \times 199 - 2 \times (1^2 + 2^2 + 3^2) + 100 \\ &= 33 + 33 \times 100 \times 199 - 28 + 100 \\ &= 656805 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

3

(1) 加法定理より

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos \theta$$

であるから,

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) \quad (\text{答})$$

(2) $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ より

$$P_1(x) = x$$

2倍角・3倍角の公式より

$$P_2(x) = 2x^2 - 1, \quad P_3(x) = 4x^3 - 3x$$

以上を例として,

$$\text{「} P_n(x) \text{は } x^n \text{の係数が } 2^{n-1} \text{である } n \text{次式」} \quad \dots\dots (*)$$

と推測できるが, その推測が正しいことを n についての数学的帰納法で示す。 $n = 1, 2$ のときは, 上記により, 既に正しい。

$$P_k(x) = 2^{k-1}x^k + R_k(x), \quad P_{k+1}(x) = 2^k x^{k+1} + R_{k+1}(x)$$

($R_n(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式)

と表されるとすれば,

$$\begin{aligned} P_{k+2}(x) &= 2xP_{k+1}(x) - P_k(x) \\ &= 2x\{2^k x^{k+1} + R_{k+1}(x)\} - \{2^{k-1}x^k + R_k(x)\} \\ &= 2^{k+1}x^{k+2} + 2xR_{k+1}(x) - 2^{k-1}x^k - R_k(x) \end{aligned}$$

ここで, $2xR_{k+1}(x) - 2^{k-1}x^k - R_k(x)$ は $k+1$ 次以下の多項式であるから, $n = k+2$ のときも (*) が成り立つ。したがって, (*) は正しく,

$$P_n(x) \text{の } x^n \text{の係数は } 2^{n-1} \quad (\text{答})$$

(3) $\cos \theta = \frac{1}{10}$ とするとき,

$$\begin{aligned} 10^{1000} \cos^2(500\theta) &= 10^{1000} \cdot \frac{1 + \cos(1000\theta)}{2} \\ &= 10^{1000} \cdot \frac{1 + P_{1000}(\cos \theta)}{2} \\ &= 10^{1000} \cdot \frac{1 + P_{1000}\left(\frac{1}{10}\right)}{2} \\ &= 10^{1000} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 + 2^{999} \left(\frac{1}{10}\right)^{1000} + R_{1000}\left(\frac{1}{10}\right) \right\} \end{aligned}$$

(2) と同様にして, $P_n(x)$ の $n-1$ 次の係数が 0 であることが (数学的帰納法により) 示され, $R_{1000}(x)$ は 998 次以下であるから, $10^{1000} \cos^2(500\theta)$ の 1 の位は

$$10^{1000} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{999} \left(\frac{1}{10}\right)^{1000} = 2^{998} \text{ の } 1 \text{ の位}$$

と一致する。

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad \dots\dots$$

より, 2^n の 1 の位は 2, 4, 8, 6 をくり返し,

$$998 = 4 \times 249 + 2$$

であるから,

$$10^{1000} \cos^2(500\theta) \text{ の } 1 \text{ の位は } 2^2 = 4 \quad (\text{答})$$