

1

ア ~ オ にあてはまる数または式を記述解答用紙の所定欄に記入せよ.

- (1) xy 平面において, 関数

$$y = f(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} ||t| - 1| dt$$

のグラフと直線 $y = 1$ で囲まれた部分の面積は である.

- (2) a, b, c は整数とする. 4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 = 0$$

の実数解が 1 と 3 となるような a の最大値は で, 最小値は である.

- (3) 三角形 ABC において, $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$ である. 三角形 ABC の内部の点 O から線分 AB に下ろした垂線と線分 AB との交点を P, 点 O から線分 BC に下ろした垂線と線分 BC との交点を Q, 点 O から線分 CA に下ろした垂線と線分 CA との交点を R とする. $OP^2 + OQ^2 + OR^2$ が最小となるとき, $OR =$ である.

- (4) 実数 a, b に対し, $\max\{a, b\}$ を次のように定める.

$$a \geq b \text{ のとき, } \max\{a, b\} = a$$

$$a < b \text{ のとき, } \max\{a, b\} = b$$

次の条件 (*) を満たす整数 k の最大値は である.

$$(*) \text{ すべての整数 } n \text{ に対して, } \max\{10^{-k}2^n, 10^{100}3^{-n}\} \geq 1$$

ただし, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$, $0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ である.

2

正の整数 n に対して, $p_n = [\sqrt[3]{n}]$ とする. ただし, 実数 x に対し, $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す. 例えば, $[1.5] = 1$, $[3] = 3$ である. 次の設問に答えよ.

- (1) $[\sqrt[3]{n}] = 2$ となる正の整数 n で, 4 の倍数であるものをすべて求めよ.
- (2) 10^6 以下の正の整数 n で, p_n^2 の倍数であるものの個数を求めよ.
- (3) 正の整数 n に対して, 整数 q_n を

n が p_n^2 の倍数でないとき, 0

n が p_n^2 の倍数であるとき, n を $p_n(p_n + 1)$ で割ったときの余り

と定義する.

$$S = \sum_{n=1}^{10^6} q_n = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{10^6}$$

を求めよ.

3

n を正の整数とする. 次の条件 (*) を満たす x についての n 次式 $P_n(x)$ を考える.

$$(*) \text{ すべての実数 } \theta \text{ に対して, } \cos n\theta = P_n(\cos \theta)$$

次の設問に答えよ.

- (1) $n \geq 2$ のとき, $P_{n+1}(x)$ を $P_n(x)$ と $P_{n-1}(x)$ を用いて表せ.
- (2) $P_n(x)$ の x^n の係数を求めよ.
- (3) $\cos \theta = \frac{1}{10}$ とする. $10^{1000} \cos^2(500\theta)$ を 10 進法で表したときの, 一の位の数字を求めよ.

〔以下余白〕