

[I]

(1) 直線 PQ のベクトル方程式は

$$z = 1 + t(\alpha - 1) \quad (t \text{ は実数})$$

 $\bar{t} = t$ より

$$\frac{\bar{z} - 1}{\bar{\alpha} - 1} = \frac{z - 1}{\alpha - 1}$$

$$(\bar{\alpha} - 1)(z - 1) = (\alpha - 1)(\bar{z} - 1)$$

$$(\bar{\alpha} - 1)z - (\alpha - 1)\bar{z} + \alpha - \bar{\alpha} = 0$$

$$\therefore \frac{\bar{\alpha} - 1}{\alpha - \bar{\alpha}}z + \frac{\alpha - 1}{\bar{\alpha} - \alpha}\bar{z} + 1 = 0$$

求める複素数は

$$\beta = \frac{\bar{\alpha} - 1}{\alpha - \bar{\alpha}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i - 1}{\frac{\sqrt{3}}{6} \times 2i} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{答})$$

(別解)

$$\alpha - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$$

より, 直線 PQ の法線ベクトルを表す複素数は

$$\gamma = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

としてよいから, 直線 PQ の方程式は

$$\bar{\gamma}(z - 1) + \gamma(\bar{z} - 1) = 0$$

$$\therefore \bar{\gamma}z + \gamma\bar{z} - (\gamma + \bar{\gamma}) = 0$$

 $\gamma + \bar{\gamma} = 1$ であるから, 求める複素数は

$$\beta = -\bar{\gamma} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{答})$$

(2) $z = \frac{1}{w}$ を $\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + 1 = 0$ に代入して

$$\beta \cdot \frac{1}{w} + \bar{\beta} \cdot \frac{1}{\bar{w}} + 1 = 0$$

 $w\bar{w} = |w|^2 > 0$ を両辺にかけると, $w \neq 0$ のもとで

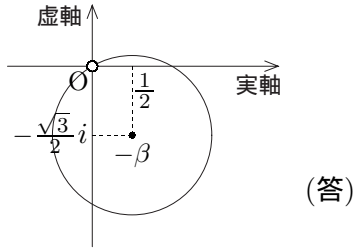
$$\beta\bar{w} + \bar{\beta}w + w\bar{w} = 0$$

$$(w + \beta)(\bar{w} + \bar{\beta}) = \beta\bar{\beta}$$

$$|w + \beta|^2 = |\beta|^2 = 1$$

$$\therefore |w + \beta| = 1 \text{ かつ } w \neq 0$$

複素数平面上に図示すると



(注) $\beta\bar{w} + \bar{\beta}w + w\bar{w} = 0$ を
 $\bar{w}(w + 2\beta) + w(\bar{w} + 2\bar{\beta}) = 0$
 と変形して、2 点 $0, -2\beta$ を直径の両端とする円であるとしてもよい。

(3) $\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + 1$ が実数(共役複素数が自分自身)であることに注意すると、直線 PQ に関して原点と同じ側(境界を含む)は

$$\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + 1 \geq 0$$

と表されるから、(1)の式変形より、点 $w = \frac{1}{z}$ が描く図形は

$$|w + \beta| \geq 1 \text{ かつ } w \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ とすると $\beta \mapsto \bar{\beta}$ となるから、直線 PR に関して原点と同じ側(境界を含む)は

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + 1 \geq 0$$

と表され、点 w については

$$|w + \bar{\beta}| \geq 1 \text{ かつ } w \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

直線 QR に関して点 P と同じ側(境界を含む)は

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \geq \operatorname{Re}(\alpha) = \frac{1}{2}$$

と表され、 $z = \frac{1}{w}$ を代入して

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{w} \geq 1$$

両辺に $w\bar{w} = |w|^2 > 0$ をかけて

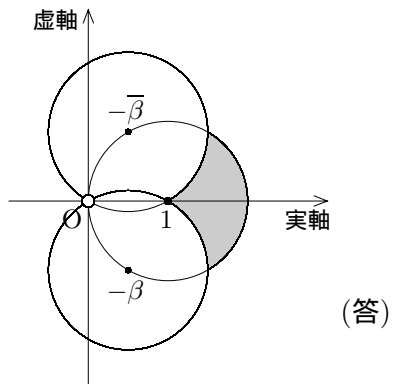
$$w\bar{w} \leq w + \bar{w}$$

$$\therefore |w - 1| \leq 1 \text{ かつ } w \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

点 z が三角形 PQR の周および内部を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ の動く範囲は

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ かつ } \textcircled{3}$$

であり、複素数平面上に図示すると次図の網目部分(境界を含む)となる。



この領域の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

$$[\text{II}] \quad f(x) = (2 - ax)e^{-a(x-2)}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} f'(x) &= -ae^{-a(x-2)} + (2 - ax)(-ae^{-a(x-2)}) \\ &= -a(3 - ax)e^{-a(x-2)} \end{aligned}$$

$a > 0$ を考え、すべての実数 x において

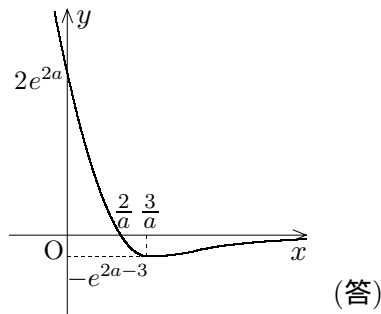
$$f'(x) < 0 \iff ax - 3 < 0 \iff x < \frac{3}{a}$$

であるから、 $f(x)$ の増減は

x	$(-\infty)$	$\frac{3}{a}$	$(+\infty)$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$(+\infty)$	\searrow 極小 \nearrow	(0)

$$f\left(\frac{3}{a}\right) = \left(2 - a \cdot \frac{3}{a}\right)e^{-a\left(\frac{3}{a}-2\right)} = -e^{2a-3}$$

$y = f(x)$ のグラフの概形は



(2) 部分積分により、 $f(x)$ の不定積分を計算しておくとして、

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= (2 - ax) \left(-\frac{1}{a}e^{-a(x-2)}\right) - \int (-a) \left(-\frac{1}{a}e^{-a(x-2)}\right) dx \\ &= \left(x - \frac{2}{a}\right)e^{-a(x-2)} + \frac{1}{a}e^{-a(x-2)} + C \\ &= \left(x - \frac{1}{a}\right)e^{-a(x-2)} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

(1) より $p = \frac{3}{a}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{a}} f(x) dx + \int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} \{-f(x)\} dx \\ &= \left[\left(x - \frac{1}{a}\right)e^{-a(x-2)} \right]_0^{\frac{2}{a}} + \left[-\left(x - \frac{1}{a}\right)e^{-a(x-2)} \right]_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}} \\ &= \frac{1}{a}e^{2a-2} \times 2 + \frac{1}{a}e^{2a} - \frac{2}{a}e^{2a-3} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^3 + 2e - 2}{a} e^{2a-3} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= (e^3 + 2e - 2) \left(-\frac{1}{a^2} e^{2a-3} + \frac{1}{a} \cdot 2e^{2a-3} \right) \\ &= (e^3 + 2e - 2) \cdot \frac{2a - 1}{a^2} e^{2a-3} \end{aligned}$$

$e^3 + 2e - 2$ は正の定数, $e^{2a-3} > 0$ であるから, $a > 0$ において $\frac{dS}{da}$ の符号変化

は $a - \frac{1}{2}$ と同じであり, a の関数として S の増減は

a	(0)	$\frac{1}{2}$	(∞)
$\frac{dS}{da}$	-	0	+
S		↘ 極小 ↗	

S を最小にする a の値は

$$a = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

[III]

(1)(i) $\triangle ABC$ の面積を S , D および P から平面 ABC におろした垂線の長さをそれぞれ h_D , h_P とすると,

$$V_P = \frac{1}{3}Sh_P, \quad V = \frac{1}{3}Sh_D$$

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AD}$ より $h_P = |t|h_D$ であるから

$$\frac{V_P}{V} = \frac{h_P}{h_D} = |t| \quad (\text{答})$$

(ii) $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ は平面 ABC と平行であるから, 点 P を通って平面 ABC に平行な平面と直線 AD との交点を Q とすると

$$\overrightarrow{AQ} = d\overrightarrow{AD}$$

であり, 四面体 $ABCP$ の体積 V_P と四面体 $ABCQ$ の体積 V_Q は体積は等しい。

(i)より

$$\frac{V_P}{V} = \frac{V_Q}{V} = |d| \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{-(\beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ &= \frac{\beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \delta(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ &= \frac{\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} + \delta\overrightarrow{AD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \end{aligned}$$

四面体 $ABCI$ の体積 V_δ は, (1)(i)より

$$V_\delta = \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} V \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

δ は $\triangle ABC$ の面積, r は点 I から平面 ABC におろした垂線の長さであるから,

$$V_\delta = \frac{1}{3}\delta r \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より

$$r = \frac{3V}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \quad (\text{答})$$

(3) (2)の結果は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関して対称であるから, 点 I から平面 ABC , 平面 ABD , 平面 ACD , 平面 BCD のいずれにおろした垂線の長さも

$$r = \frac{3V}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

となる。よって, 点 I は四面体 $ABCD$ の内接球の中心である。 (証明おわり)

[IV]

(1) 確率の総和は1であるから,

$$\sum_{k=0}^n p_k(t) = 1 \quad (\text{答})$$

(2)

$$p_k(t) = a^k \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} p_0(t) = {}_n C_k a^k t^n$$

であるから, 二項定理より

$$\sum_{k=0}^n p_k(t) = (a+1)^n t^n$$

(1)より

$$(a+1)^n t^n = 1$$

であり, 実数値であることを考え,

$$(a+1)t = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{t} - 1 \quad (\text{答})$$

(3) (2)の考察より

$$p_k(t) = {}_n C_k \left(\frac{1}{t} - 1\right)^k t^n = {}_n C_k (1-t)^k t^{n-k}$$

$p_0(t) = t^n$, $p_n(t) = (1-t)^n$ とみることにより, k によらず $p_k(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ で定義される。

$p_0(t) = t^n$ は単調増加であるから, 最大値を与える t の値は

$$T_0 = 1$$

$p_n(t) = (1-t)^n$ は単調減少であるから, 最大値を与える t の値は

$$T_n = 0$$

$1 \leq k \leq n-1$ のとき, $0 < t < 1$ において

$$\begin{aligned} p_k'(t) &= {}_n C_k \{-k(1-t)^{k-1} t^{n-k} + (1-t)^k \cdot (n-k)t^{n-k-1}\} \\ &= {}_n C_k (1-t)^{k-1} t^{n-k-1} \{-kt + (1-t)(n-k)\} \\ &= {}_n C_k (1-t)^{k-1} t^{n-k-1} (n-k-nt) \end{aligned}$$

の符号変化は $\frac{n-k}{n} - t$ と同じであるから,

t	0	$\frac{n-k}{n}$	1
$p_k'(t)$	+	0	-
$p_k(t)$		↗ 極大 ↘	

$p_k(t)$ が最大となる t の値は

$$T_k = \frac{n-k}{n} \quad (\text{答})$$

であり, $k=0, n$ のときも満たす。

(4) (2), (3)より

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} {}_n C_{n-k} a^k t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} {}_n C_{n-k} a^k t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_{n-k-1} a^k t^n \\ &= t^n \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k a^k \\ &= t^n (a+1)^{n-1} \\ &= t^n \left(\frac{1}{t}\right)^{n-1} \\ &= t \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$[\text{V}] \quad f(x) = x^3 + x^2 + px + q$$

(1) α が $f(x) = 0$ の解ならば,

$$g(\alpha) = \frac{-1}{\alpha+1}, \quad g(g(\alpha)) = \frac{-1}{\frac{-1}{\alpha+1} + 1} = \frac{-\alpha-1}{\alpha}$$

も $f(x) = 0$ の解である。

$$g(\beta) = \frac{-1}{\beta+1} = \beta \text{ を満たすとすれば,}$$

$$\beta^2 + \beta + 1 = 0$$

を満たす虚数であり,

$$3\beta \neq -1, \quad 2\beta + \bar{\beta} = \beta - 1 \neq -1$$

より $f(x) = 0$ の解が $x^2 + x + 1 = 0$ の解だけになることはないから,

$$f(x) = 0 \text{ は } \alpha \neq \frac{-1}{\alpha+1} \text{ なる解 } \alpha \text{ をもつ。}$$

さらに, $\beta = \frac{-\beta-1}{\beta}$ のときも $\beta^2 + \beta + 1 = 0$ となるから $f(x) = 0$ は相異なる 3 解をもち,

$$f(x) = (x - \alpha) \left(x - \frac{-1}{\alpha+1} \right) \left(x - \frac{-\alpha-1}{\alpha} \right)$$

と表され,

$$f(x) = 0 \text{ と } f(g(x)) = 0 \text{ は同値}$$

である。

$$f(g(x)) = \left(\frac{-1}{x+1} \right)^3 + \left(\frac{-1}{x+1} \right)^2 + p \cdot \frac{-1}{x+1} + q = 0$$

を変形すると

$$\begin{aligned} -1 + (x+1) - p(x+1)^2 + q(x+1)^3 &= 0 \\ qx^3 + (3q-p)x^2 + (3q-2p+1)x + q-p &= 0 \end{aligned}$$

$q \neq 0$ より

$$x^3 + \left(3 - \frac{p}{q} \right) x^2 + \left(3 - \frac{2p}{q} + \frac{1}{q} \right) x + 1 - \frac{p}{q} = 0$$

これが $f(x) = 0$ と同じ方程式を表すから

$$\begin{cases} 3 - \frac{p}{q} = 1 & \dots\dots ① \\ 3 - \frac{2p}{q} + \frac{1}{q} = p & \dots\dots ② \\ 1 - \frac{p}{q} = q & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①より

$$\frac{p}{q} = 2$$

③に代入して

$$q = 1 - 2 = -1$$

②に代入して

$$p = 3 - 2 \times 2 - 1 = -2$$

となって①も満たす。以上をまとめると、

$$p = -2, \quad q = -1 \quad (\text{答})$$

(注) $p \neq q$ は $f(x) = 0$ が $x = -1$ を解にもたないことを意味するが、 $\frac{-1}{\alpha+1}$ が存在するというで用いられ、表立って「 $p \neq q$ より」と説明する場面は出てこない。

(2) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ は実数係数であり、

$$f(-2) = -8 + 4 + 4 - 1 = -1 < 0$$

$$f(-1) = -1 + 1 + 2 - 1 = 1 > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(2) = 8 + 4 - 4 - 1 = 7 > 0$$

であることより、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と

$$-2 < x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < 2$$

の範囲でそれぞれ交わるから、 $f(x) = 0$ は $-2 < x < 2$ の範囲に相異なる3実数解をもつ。 (証明おわり)

(注) (1)の議論では「相異なる解をもつ」ことが示されただけで、解が実数であることは示されていない。

(3) (1)の考察より、 $f(x) = 0$ の1つの解を α とすると、あとの2解は $\frac{-1}{\alpha+1}$, $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ である。

$$\alpha = 2 \cos \theta$$

とすると、

$$f(\alpha) = 8 \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta - 1 = 0$$

であるから、

$$f(\alpha) = (2 \cos \theta + 1)(4 \cos^2 \theta - 2) + 1 = 0$$

より

$$\frac{-1}{\alpha+1} = \frac{-1}{2 \cos \theta + 1} = 4 \cos^2 \theta - 2 = 2(2 \cos^2 \theta - 1) = 2 \cos 2\theta$$

また、

$$f(\alpha) = 2 \cos \theta (4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2) - 1 = 0$$

より

$$\begin{aligned}
 \frac{-\alpha - 1}{\alpha} &= -1 - \frac{1}{2 \cos \theta} \\
 &= -1 - (4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2) \\
 &= -4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + f(\alpha) \quad (\because f(\alpha) = 0) \\
 &= 8 \cos^3 \theta - 6 \cos \theta \\
 &= 2(4 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) \\
 &= 2 \cos 3\theta
 \end{aligned}$$

よって、 $2 \cos \theta$ が $f(x) = 0$ の解であるとき、 $2 \cos 2\theta$, $2 \cos 3\theta$ も解である。
(証明おわり)

(4) $\alpha = 2 \cos \theta$ が $f(x) = 0$ の解であるとき、(3)の議論より

$$g(g(\alpha)) = 2 \cos 4\theta = 2 \cos 3\theta$$

であるから、

$$\cos 3\theta - \cos 4\theta = 2 \sin \frac{7}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

$0 < \theta < \pi$ では $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ であるから

$$\sin \frac{7}{2}\theta = 0$$

$0 < \frac{7}{2}\theta < \frac{7}{2}\pi$ より

$$\frac{7}{2}\theta = \pi, 2\pi, 3\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7} \quad (\text{答})$$

(注)

1° 「 $2 \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) が $f(x) = 0$ の解であるとき」と仮定されているが、(2)において3解とも $-2 < x < 2$ の範囲にある実数であることが示されているので、解の1つを

$$\alpha = 2 \cos \theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

とおくことができる。

2° (純粋に実数の範囲の問題ではあるが、) 複素数の性質を用いて解くこともできる。

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

とおくと、

$$2 \cos \theta = z + \bar{z} = z + \frac{1}{z}$$

であるから、 $f(x) = 0$ の解であることより

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 &= 0 \\ z^3 + \frac{1}{z^3} + 3z \cdot \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right) + z^2 + \frac{1}{z^2} + 2z \cdot \frac{1}{z} \\ &\quad - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$$\therefore z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

z は $0 < \arg z < \pi$ の範囲にある 1 の 7 乗根であるから

$$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}, \quad \cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7}, \quad \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}$$

$$\therefore \theta = \arg z = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7} \quad (\text{答})$$