

[ I ]

(1)  $q, r$  は実数であることより,  $\alpha, \beta$  は「ともに実数」または「互いに共役な虚数」であるから, 3点  $P, A, B$  が三角形をなすのは,

2次方程式  $x^2 + qx + r = 0$  が虚数解をもち,  
かつ, 3点  $P, A, B$  が同一直線上にない

ときであり, 条件は

$$(\text{判別式}) = q^2 - 4r < 0 \quad \text{かつ} \quad (\text{実部}) = \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{q}{2} \neq p$$

$$\therefore r > \frac{1}{4}q^2 \quad \text{かつ} \quad q \neq -2p \quad (\text{答})$$

(2) (1)の条件のもと,

$$\alpha, \beta = \frac{-q \pm \sqrt{4r - q^2} i}{2}$$

であるから, 三角形  $PAB$  の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |Im(\alpha) - Im(\beta)| |Re(\alpha) - Re(\beta)| \\ &= \frac{1}{2} \left| p + \frac{q}{2} \right| \sqrt{4r - q^2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 外心  $Q$  は  $AB$  の垂直二等分線上にあるから,  $Q$  を表す複素数を  $t$  とすると,  
 $t$  は実数

であり,  $PQ = AQ$  より

$$\begin{aligned} (t - p)^2 &= \left( t + \frac{q}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{4r - q^2}}{2} \right)^2 \\ -2pt + p^2 &= qt + \frac{q^2}{4} + \frac{4r - q^2}{4} \\ (2p + q)t &= p^2 - r \end{aligned}$$

$2p + q \neq 0$  より

$$\text{外心 } Q \text{ を表す複素数は } t = \frac{p^2 - r}{2p + q} \quad (\text{答})$$

外接円の半径  $R$  は

$$R = |t - p| = \left| \frac{p^2 - r - p(2p + q)}{2p + q} \right| = \left| \frac{p^2 + pq + r}{2p + q} \right| \quad (\text{答})$$

(注)  $q^2 - 4r < 0$  より

$$p^2 + pq + r = p^2 + pq + \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} + r = \left( p + \frac{q}{2} \right)^2 - \frac{q^2 - 4r}{4} > 0$$

であるから,

$$R = \frac{p^2 + pq + r}{|2p + q|}$$

と表示できるが、試験場ではうっかり見過ごしてしまうかもしれない。

正弦定理と(2)を用いて  $R$  を求めれば、この絶対値がはずれた形が自然に得られる。三角形 PAB において、正弦定理と面積公式より

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \sin \angle APB = \frac{1}{2} \cdot AP^2 \cdot \sin \angle APB$$

2 式より  $\sin \angle APB$  を消去して、(2)を用いると

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle APB} = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{AP^2}{2S}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4r - q^2} \cdot \frac{\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{4r - q^2}{4}}{\left|p + \frac{q}{2}\right| \sqrt{4r - q^2}}$$

$$= \frac{\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{4r - q^2}{4}}{2 \left|p + \frac{q}{2}\right|}$$

$$= \frac{p^2 + pq + r}{|2p + q|}$$

[II]

$$(1) \quad x + 1 - \frac{1}{4}(-x^2 - 2x - 5) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 9) = \frac{1}{4}(x + 3)^2$$

$$-3x + 5 - \frac{1}{4}(-x^2 - 2x - 5) = \frac{1}{4}(x^2 - 10x + 25) = \frac{1}{4}(x - 5)^2$$

より, 題意の領域は

$$y \leq x + 1 \quad \text{かつ} \quad y \leq -3x + 5 \quad \text{かつ} \quad y \geq -\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5)$$

2 直線の交点の  $x$  座標は

$$x + 1 = -3x + 5$$

より

$$x = 1$$

であるから, 求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-3}^1 \left\{ x + 1 - \frac{1}{4}(-x^2 - 2x - 5) \right\} dx$$

$$+ \int_1^5 \left\{ -3x + 5 - \frac{1}{4}(-x^2 - 2x - 5) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-3}^1 (x + 3)^2 dx + \frac{1}{4} \int_1^5 (x - 5)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}(x + 3)^3 \right]_{-3}^1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}(x - 5)^3 \right]_1^5$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 4^3 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times (-4)^3$$

$$= \frac{32}{3} \quad (\text{答})$$

(2)  $-3 < a \leq 1$  において

$$-\frac{1}{4}(a^2 + 2a + 5) < b < a + 1$$

 $1 \leq a < 5$  において

$$-\frac{1}{4}(a^2 + 2a + 5) < b < -3a + 5$$

である格子点  $(a, b)$  の個数を求めればよく,

$$a = -2 \text{ のとき } -\frac{5}{4} < b < -1, \quad 0 \text{ 個}$$

$$a = -1 \text{ のとき } -1 < b < 0, \quad 0 \text{ 個}$$

$$a = 0 \text{ のとき } -\frac{5}{4} < b < 1, \quad 2 \text{ 個}$$

$$a = 1 \text{ のとき } -2 < b < 2, \quad 3 \text{ 個}$$

$$a = 2 \text{ のとき } -\frac{13}{4} < b < -1, \text{ 2 個}$$

$$a = 3 \text{ のとき } -5 < b < -4, \text{ 0 個}$$

$$a = 4 \text{ のとき } -\frac{29}{4} < b < -7, \text{ 0 個}$$

以上を合計して，求める格子点の個数は

$$2 + 3 + 2 = 7 \text{ 個 (答)}$$

## [III]

(1)  $\sqrt[3]{p}$  が有理数でないとするば,

$$\sqrt[3]{p} = \frac{m}{n}$$

を満たす互いに素な自然数  $m, n$  が存在して,

$$n\sqrt[3]{p} = m \quad \therefore n^3 p = m^3$$

$m^3$  は  $p$  で割り切れるが,  $p$  は素数であるから  $m$  は  $p$  で割り切れ,

$$m = pk \quad (k \text{ は自然数})$$

と表されるから,

$$n^3 = p^2 k^3$$

このとき  $n$  も  $p$  で割り切れ,  $m$  と  $n$  が互いに素であることに反する。

よって,  $\sqrt[3]{p}$  は無理数である。 (証明終わり)

(注)

1° 高校数学の範囲では, 実数であることを示すのは不可能である。上の解答では「無理数」を「有理数でない」の意味で示した。

2° ここでは  $m, n$  は自然数(正の整数)としてよいが, 0 でない整数のもとで矛盾が導けると論じておくと, (4) で新たに説明をしなくても済む。

3° 入試の答案としては,  $n^3 p = m^3$  が素因数分解の一意性に反するから矛盾すると説明してもよい。

$$(2) \quad a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ならば, 両辺に  $\sqrt[3]{p}$  をかけて

$$ap + b(\sqrt[3]{p})^2 + c\sqrt[3]{p} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(証明終わり)

(3) ①が成り立つならば, (2)より②が成り立ち, ①× $b$  - ②× $a$ より

$$bc - a^2 p + (b^2 - ac)\sqrt[3]{p} = 0 \quad \text{(証明終わり)}$$

(4)  $a, b, c$  は整数(特に有理数)であり, (1)より  $\sqrt[3]{p}$  は無理数であるから, (3)より

$$bc - a^2 p = 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 - ac = 0$$

$c$  を消去すると

$$(abc =) a^3 p = b^3$$

ここで,  $a \neq 0$  とすると, (1)と同じ議論により矛盾するから,

$$a = b = 0$$

であり, ①より

$$c = 0$$

も成り立つ。 (証明終わり)

[IV]

$$(1) f'(x) = (e^x)'(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cos x \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) (i) \quad g'(x) &= -\pi e^{-\pi x} \sin \pi x + e^{-\pi x} \cdot \pi \cos \pi x \\ &= \pi e^{-\pi x} (\cos \pi x - \sin \pi x) \\ &= \sqrt{2} \pi e^{-\pi x} \left( \cos \pi x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \pi x \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \pi e^{-\pi x} \cos \left( \pi x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff \cos \left( \pi x + \frac{\pi}{4} \right) > 0 \\ &\iff -\frac{\pi}{2} - 2m\pi < \pi x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - 2m\pi \\ &\iff -2m - \frac{3}{4} < x < -2m + \frac{1}{4} \quad (m \text{ は整数}) \end{aligned}$$

であるから,  $g'(x)$  は

$$x = -2m - \frac{3}{4} \text{ で } - \rightarrow +, \quad x = -2m + \frac{1}{4} \text{ で } + \rightarrow -$$

 $g(x)$  の極値は

$$\begin{cases} \text{極大値 } g\left(-2m + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} + 2m\pi} \\ \text{極小値 } g\left(-2m - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3}{4}\pi + 2m\pi} \end{cases} \quad (m \text{ は整数}) \quad (\text{答})$$

(ii) まず不定積分を計算しておく,

$$\begin{aligned} \int e^{-2\pi x} \cos 2\pi x \, dx &= -\frac{1}{2\pi} e^{-2\pi x} \cos 2\pi x + \frac{1}{2\pi} \int e^{-2\pi x} (-2\pi \sin 2\pi x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} e^{-2\pi x} \cos 2\pi x + \frac{1}{2\pi} e^{-2\pi x} \sin 2\pi x \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int e^{-2\pi x} \cdot 2\pi \cos 2\pi x \, dx \\ \therefore \int e^{-2\pi x} \cos 2\pi x \, dx &= \frac{1}{4\pi} e^{-2\pi x} (-\cos 2\pi x + \sin 2\pi x) + C \\ &\quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \pi g(x)^2 \, dx &= \int \pi e^{-2\pi x} \cdot \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int e^{-2\pi x} \, dx - \frac{\pi}{2} \int e^{-2\pi x} \cos 2\pi x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} e^{-2\pi x} + \frac{1}{8} e^{-2\pi x} (\cos 2\pi x - \sin 2\pi x) + C \\ &\quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

題意の回転体の体積  $V_n$  は

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{n-1}^n \pi g(x)^2 dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4} e^{-2\pi x} + \frac{1}{8} e^{-2\pi x} (\cos 2\pi x - \sin 2\pi x) \right]_{n-1}^n \\ &= \frac{1}{4} (e^{-2\pi(n-1)} - e^{-2\pi n}) + \frac{1}{8} (e^{-2\pi n} - e^{-2\pi(n-1)}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{-2\pi(n-1)} - e^{-2\pi n}) \\ &= \frac{1}{8} e^{-2\pi(n-1)} (1 - e^{-2\pi}) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$  は初項  $\frac{1 - e^{-2\pi}}{8}$ , 公比  $e^{-2\pi}$  の無限等比級数であり,  $0 < e^{-2\pi} < 1$  よ

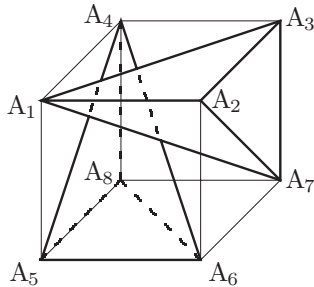
り収束して, 和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{1 - e^{-2\pi}}{8} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{1}{8} \quad (\text{答})$$

[V]

- (1) 正四面体  $A_1A_3A_6A_8$  の各面は, 正四面体  $A_2A_4A_5A_7$  の各辺の中点を通り, 立方体の中心は両方の正四面体の内部にあるから, 共通部分  $Z$  は  
 正四面体の各辺の中点を頂点とする正八面体 (答)  
 となる。

(2)



四面体  $A_1A_2A_3A_4$  と平面  $A_1A_6A_7A_4$  との共通部分は線分  $A_1A_7$  であり, 四面体  $A_4A_5A_6A_8$  と平面  $A_1A_6A_7A_4$  との共通部分は線分  $A_4A_6$  であるから, 共通部分  $Z$  は, 線分  $A_1A_7$  と線分  $A_4A_6$  の共通部分, すなわち  
 立方体の中心 1 点 (答)  
 である。

- (3) X と Y の決め方 (8 点を 4 点ずつに分ける方法) は

$$\frac{{}_8C_4}{2} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2 \times 4!} = 35 \text{ 通り}$$

あり, その各場合は同様に確からしい。

あとで 4 点を拾い上げていくときのために, 立方体の 8 頂点から 3 点を選んでできる直角二等辺三角形を, 辞書式順序で書き出しておく

$\triangle A_1A_2A_3, \triangle A_1A_2A_4, \triangle A_1A_2A_5, \triangle A_1A_2A_6,$   
 $\triangle A_1A_3A_4, \triangle A_1A_4A_5, \triangle A_1A_4A_8, \triangle A_1A_5A_6,$   
 $\triangle A_1A_5A_8, \triangle A_2A_3A_4, \triangle A_2A_3A_6, \triangle A_2A_3A_7,$   
 $\triangle A_2A_5A_6, \triangle A_2A_6A_7, \triangle A_3A_4A_7, \triangle A_3A_4A_8,$   
 $\triangle A_3A_6A_7, \triangle A_3A_7A_8, \triangle A_4A_5A_8, \triangle A_4A_7A_8,$   
 $\triangle A_5A_6A_7, \triangle A_5A_6A_8, \triangle A_5A_7A_8, \triangle A_6A_7A_8$

- (i) X と Y が共通部分をもたないのは,

- 立方体の対面となる 2 つの正方形
- 3 面が二等辺直角三角形となる 2 つの四面体

のいずれかの場合であり,  $A_1$  を含む 4 点の組を列挙することで数えると,

$A_1A_2A_3A_4, A_1A_2A_6A_5, A_1A_4A_8A_5,$   
 $A_1A_2A_4A_5, A_1A_2A_3A_6, A_1A_3A_4A_8, A_1A_5A_6A_8$



の 7 組あるから，確率  $p$  は

$$p = \frac{7}{35} = \frac{1}{5} \quad (\text{答})$$

(ii)  $X$  と  $Y$  の共通部分  $Z$  が 1 点になるのは，(2)のように，ちょうど 2 面が直角二等辺三角形である四面体ができる場合であり， $A_1$  を含む組を，直角二等辺三角形の辞書式順序に沿って書き並べると，

$$\begin{aligned} & A_1A_2A_3A_5, \quad A_1A_2A_3A_7, \quad A_1A_2A_4A_6, \quad A_1A_2A_4A_8, \\ & A_1A_2A_5A_8, \quad A_1A_2A_6A_7, \quad A_1A_3A_4A_5, \quad A_1A_3A_4A_7, \\ & A_1A_4A_5A_6, \quad A_1A_4A_8A_7, \quad A_1A_5A_6A_7, \quad A_1A_5A_8A_7 \end{aligned}$$

の 12 組あるから，確率  $q_0$  は

$$q_0 = \frac{12}{35} \quad (\text{答})$$

(iii)  $X$  と  $Y$  の共通部分  $Z$  が線分になるのは， $X$  と  $Y$  がともに正方形でない長方形になる場合で 3 組あるから，確率  $q_1$  は

$$q_1 = \frac{3}{35} \quad (\text{答})$$

(iv)  $X$  と  $Y$  の共通部分  $Z$  が立体図形となるのは，

- とともに正四面体
- とともに直角二等辺三角形の面が 1 つだけの四面体であり，  
直角二等辺三角形の面どうしが正射影の位置にある

のいずれかの場合であり， $A_1$  を含む組を，直角二等辺三角形の辞書式順序に沿って書き並べると，

$$\begin{aligned} & A_1A_3A_6A_8, \\ & A_1A_2A_3A_8, \quad A_1A_2A_4A_7, \quad A_1A_2A_5A_7, \quad A_1A_2A_6A_8, \\ & A_1A_3A_4A_6, \quad A_1A_4A_5A_7, \quad A_1A_4A_8A_6, \quad A_1A_5A_6A_3, \\ & A_1A_5A_8A_3, \quad A_3A_6A_7A_1, \quad A_3A_7A_8A_1, \quad A_6A_7A_8A_1 \end{aligned}$$

の 13 組あるから，確率  $q_3$  は

$$q_3 = \frac{13}{35} \quad (\text{答})$$

(v)  $p + q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = 1$  であるから，

$$q_2 = 1 - (p + q_0 + q_1 + q_3) = 0 \quad (\text{答})$$

(注) 考えやすい事象から求めていくと，共通部分  $Z$  が (1 点でない) 平面図形の場合を除いて全事象が埋まったので，上の解答では  $q_2$  を余事象の確率で求めた。一般に，ないことを説明するのは難しいが，共通部分  $Z$  が (1 点でない) 平面図形にはならないことをうまく説明できれば，(ii)，(iv) の一方を余事象の確率で求めることもできる。