

[I] 3次方程式  $(x-p)(x^2+qx+r)=0$  (ただし,  $p, q, r$  は実数) を考え, 方程式  $x^2+qx+r=0$  の解を  $\alpha, \beta$  とする。  $p, \alpha, \beta$  に対応する複素数平面上の点をそれぞれ  $P, A, B$  とするとき, 次の間に答えよ。

- (1) 3点  $P, A, B$  が三角形をなすための  $p, q, r$  の条件を求めよ。
- (2) (1) の条件の下で, 三角形  $PAB$  の面積  $S$  を  $p, q, r$  で表せ。
- (3) さらに, 三角形  $PAB$  の外接円の中心  $Q$  および半径  $R$  を  $p, q, r$  で表せ。

[II] 次の間に答えよ。

- (1)  $xy$  平面上の2直線  $x-y+1=0, 3x+y-5=0$  と曲線  $x^2+2x+4y+5=0$  で囲まれる領域の面積を求めよ。
- (2) (1) で考えた領域の点  $(a, b)$  で境界上になく,  $a, b$  がともに整数であるものの個数を求めよ。

[III]  $p$  を素数,  $a, b, c$  を整数とする。次の問に答えよ。

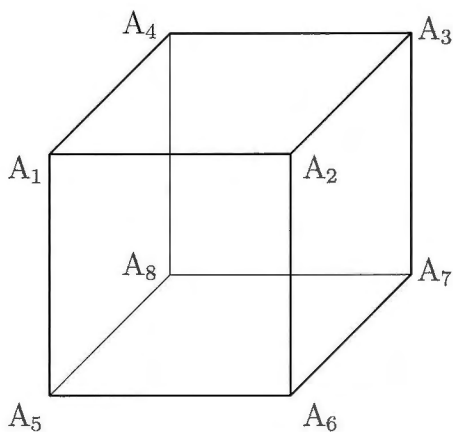
- (1)  $\sqrt[3]{p}$  が無理数になることを示せ。
- (2)  $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0$  ならば,  $ap + b(\sqrt[3]{p})^2 + c\sqrt[3]{p} = 0$  となることを示せ。
- (3)  $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0$  ならば,  $bc - a^2p + (b^2 - ac)\sqrt[3]{p} = 0$  となることを示せ。
- (4)  $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0$  ならば,  $a = b = c = 0$  となることを示せ。

[IV] 次の問に答えよ。

- (1) 関数  $f(x) = e^x (\cos x + \sin x)$  を微分せよ。
- (2) 関数  $g(x) = e^{-\pi x} \sin \pi x$  を考える。
  - (i)  $g(x)$  の極値をすべて求めよ。
  - (ii)  $n - 1 \leq x \leq n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) における  $y = g(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた図形を,  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V_n$  を求めよ。
  - (iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$  を求めよ。

[V] 立方体の8個の頂点を図のように $A_1, A_2, \dots, A_8$ とする。この8点から無作為に4点を選び、それらを頂点とする四面体あるいは四角形を $X$ とする。また、残りの4点から同様にしてできる図形を $Y$ とし、 $X$ と $Y$ の共通部分(交わってできる図形)を $Z$ とする。次の問に答えよ。ただし、(1), (2)は答のみでよい。

- (1)  $X$ が $A_1, A_3, A_6, A_8$ を頂点とする四面体で、 $Y$ が $A_2, A_4, A_5, A_7$ を頂点とする四面体のとき、 $Z$ はどんな図形か。
- (2)  $X$ が $A_1, A_2, A_3, A_7$ を頂点とする四面体で、 $Y$ が $A_4, A_5, A_6, A_8$ を頂点とする四面体のとき、 $Z$ はどんな図形か。
- (3)  $X$ と $Y$ が共通部分をもたない確率を $p$ とし、 $X$ と $Y$ の共通部分 $Z$ が1点になる確率を $q_0$ 、線分になる確率を $q_1$ 、平面図形になる確率を $q_2$ 、立体図形になる確率を $q_3$ とする。 $p, q_0, q_1, q_2, q_3$ を求めよ。



[以下余白]