

[I] $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ とおき、複素数 $1, \alpha, \bar{\alpha}$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P, Q, R とする。次の問に答えよ。

- (1) 直線 PQ は複素数 β を用いて方程式 $\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + 1 = 0$ で表される。この β を求めよ。
- (2) 点 z が直線 PQ 上を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ が描く複素数平面上の図形を求めよ。
- (3) 点 z が三角形 PQR の周および内部を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ の動く範囲を複素数平面上に図示し、その面積を求めよ。

[II] 正の実数 a に対して

$$f(x) = (2 - ax)e^{-a(x-2)}$$

とする。次の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、グラフの概形を描け。
- (2) $f(x)$ を最小にする x の値を p で表す。このとき

$$S = \int_0^p |f(x)| dx$$

を a を用いて表せ。

- (3) (2) の S を最小にする a の値を求めよ。

[III] 次の問に答えよ。

(1) 四面体 ABCD と四面体 ABCP の体積をそれぞれ V, V_P とする。

(i) $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AD}$ が成り立つとき、体積比 $\frac{V_P}{V}$ を求めよ。

(ii) $\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD}$ が成り立つとき、体積比 $\frac{V_P}{V}$ を求めよ。

(2) 四面体 ABCD について、点 A, B, C, D の対面の面積をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。原点を O として、

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

となる点 I を考える。四面体 ABCD の体積を V とするとき、3点 A, B, C を通る平面と点 I の距離 r を求めよ。

(3) (2) の点 I は四面体 ABCD に内接する球の中心であることを示せ。

[IV] n を正の整数とする。試行の結果に応じて k 点 ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) が与えられるゲームがある。ここで k 点を獲得する確率は、ある $t > 0$ によって決まっており、これを $p_k(t)$ とする。このとき、確率 $p_k(t)$ は $a \geq 0$ に対して以下の関係式を満足するという。

$$p_0(t) = t^n, \quad p_k(t) = a \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot p_{k-1}(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

次の問に答えよ。

(1) $\sum_{k=0}^n p_k(t)$ の値を求めよ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) 各 k に対して、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $p_k(t)$ を最大にするような t の値 T_k を求めよ。ただし、 $p_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), $p_n(0) = 1$ と定める。

(4) $0 < t < 1$ なる t を与えたとき、(3) で求めた T_k に対して、

$$E = \sum_{k=0}^n T_k \cdot p_k(t)$$

とする。 E の値を求めよ。

[V] 3次の整式 $f(x) = x^3 + x^2 + px + q$ (ただし, $p \neq q, q \neq 0$), および $g(x) = \frac{-1}{x+1}$ が次の条件(*)をみたすとする。

(*) $f(x) = 0$ の任意の解 α に対して $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である。

次の問に答えよ。

- (1) p, q の値を求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ は $-2 < x < 2$ の範囲に3つの実数解をもつことを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ の任意の解を $2 \cos \theta$ とするとき, $2 \cos 2\theta, 2 \cos 3\theta$ も解であることを示せ。
- (4) $2 \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) が $f(x) = 0$ の解であるとき, θ の値を求めよ。

[以下余白]