

どっちの条件でショウ

入試問題の中から、必要条件か十分条件かを問う問題を集めてみました。本来は、ふつうに問題を解く中で(説明を)わかりやすくするために使う用語なので、このような形で練習するのは不自然です。しかし、こうした訓練を通して本来の思考の手助けになれば良いと思い、ファイルを作成しました。

実は、必要・十分というのは、 $p \Rightarrow q$ が真の命題のとき

p は q であるための十分条件

q は p であるための必要条件

というだけのことなので、難しいはずはないのです。

1 x は実数とする。下の (1)~(5) のそれぞれにおいて、B は A であるためのどのような条件か、次の (イ)~(ニ) の中から選び、解答欄(省略)に記号で答えよ。

- (イ) 必要であるが十分でない
- (ロ) 十分であるが必要でない
- (ハ) 必要かつ十分である
- (ニ) 必要でも十分でもない

- | | |
|--|----------------------------------|
| (1) A : $x^3 > 1$ | B : $x > 0$ |
| (2) A : $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$ | B : $x > 1$ |
| (3) A : $\cos^2 x > 0$ | B : $\sin^2 x > 0$ |
| (4) A : $\tan x > 0$ | B : $\cos x > 0$ かつ $\sin x > 0$ |
| (5) A : x は $x^2 - 2x - 4 < 0$ をみたくす整数 | B : x は $-2 < x < 4$ をみたくす整数 |

(東京女子医大)

2 x, y は実数とする。次の (1)~(4) について の中にあてはまるものを下のア~エの中から選んで、番号に従い解答用紙(省略)に記入せよ。ただし、同じ記号を複数回用いてもよい。

- ア．必要条件であるが、十分条件でない
- イ．十分条件であるが、必要条件でない
- ウ．必要十分条件である
- エ．必要条件でも十分条件でもない

- (1) $x > y$ は、 $x^2 > y^2$ であるための 。
- (2) $x^2 > y^2$ は、 $x^4 > y^4$ であるための 。
- (3) $x + y > 2$ は、 $x > 1$ または $y > 1$ であるための 。
- (4) $x < 1$ または $y < 1$ は、 $x^2 + y^2 < 1$ であるための 。

(神戸薬大)

3 実数 c に関する以下の条件 (*) を考える :

$$(*) \quad |c| \leq 2$$

以下の(1)から(6)の c に関する条件がそれぞれ上の条件 (*) が成り立つための

- (イ) 必要条件であるが, 十分条件ではない,
- (ロ) 十分条件であるが, 必要条件ではない,
- (ハ) 必要十分条件である,
- (ニ) 必要条件でも十分条件でもない,

のいずれであるかを答え, その理由を説明せよ.

- (1) $c \leq 2$,
- (2) $c^2 - 2 \leq 0$,
- (3) すべての実数 x に対して $x^4 - c \geq 0$,
- (4) ある実数 x があり $(x - 1)^2 + c^2 \leq 4$ となる,
- (5) $x < 1$ ならば $cx < 2$,
- (6) x の 2 次方程式 $x^2 + cx + 1 = 0$ は実数解をもたない.

(お茶女大)

4 x, y を実数とする。以下の には、下の ㉑ ~ ㉔ から適当に選んでその記号を入れよ。

(1) $x^2 + y^2 \leq 1$ であることは $|x| + |y| \leq 1$ であるための

(2) $|x + y| \leq 1$ であることは $|x| + y \leq 1$ であるための

(3) $(x + y)^2 \leq 1$ であることは $|x + y| \leq 1$ であるための

(4) $\frac{1}{|x - y|} \geq 1$ であることは $|x - y| \leq 1$ であるための

(5) $\sqrt{x + y} \leq 1$ かつ $\sqrt{x - y} \leq 1$ であることは $\sqrt{x^2 - y^2} \leq 1$ であるための

(6) $|x| + |y| \leq 1$ であることは $|x + y| \leq 1$ かつ $|x - y| \leq 1$ であるための

(7) $(x - y)^2 \leq 1$ であることは $\sqrt{x - y} \leq 1$ であるための

(8) $\frac{1}{x^2 - y^2} \leq 1$ であることは $x^2 - y^2 \geq 1$ であるための

- ㉑ 必要十分条件である。
- ㉒ 必要条件であるが十分条件ではない。
- ㉓ 十分条件であるが必要条件ではない。
- ㉔ 必要条件でも十分条件でもない。

(立命館大)

5 条件 p, q に関し, 次の 1 ~ 4 から最も適する番号を選んで答えなさい。

1. p は q であるための必要条件であり, 十分条件でない。
2. p は q であるための十分条件であり, 必要条件でない。
3. p は q であるための必要十分条件である。
4. 上のいずれでもない。

(a) 平面上の異なる 3 点 A, B, C において

p : $\triangle ABC$ は直角三角形である。

q : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

(答)

(b) a, b が有理数のとき

p : $(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b) = 0$

q : $a = b = 0$

(答)

(c) $0^\circ < x < 90^\circ, 0^\circ < y < 90^\circ$ とするとき

p : $\sin x = \frac{1}{2} \sin y$

q : $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan y$

(答)

(d) x を正の数とするとき

p : $x \geq 2$

q : x は正の数 y, z により $x = z^y + z^{-y}$ と表される。

(答)

(慶応大)

1

$$\begin{aligned} (1) \quad A &\iff x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) > 0 \\ &\iff x - 1 > 0 \quad (\because x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}) \\ &\iff x > 1 \quad \not\iff B : x > 0 \end{aligned}$$

であるから，BはAであるための

必要条件であるが，十分条件ではない (イ) (答)

$$(2) \quad A \iff (x-1)^3 > 0 \iff x > 1 \iff B$$

であるから，BはAであるための必要十分条件 (ハ) (答)

$$(3) \quad A \iff \cos x \neq 0 \iff x \neq 90^\circ + 180^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

$$B \iff \sin x \neq 0 \iff x \neq 180^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

であるから，BはAであるための

必要条件でも十分条件ではない (ニ) (答)

$$(4) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ を考えて}$$

$$A \iff \cos x \text{ と } \sin x \text{ は同符号} \quad \not\iff B : \cos x \text{ かつ } \sin x > 0$$

であるから，BはAであるための

十分条件であるが，必要条件ではない (ロ) (答)

$$(5) \quad f(x) = x^2 - 2x - 4 \text{ とおくと}$$

$$f(-2) = 4 > 0, \quad f(-1) = -1 < 0, \quad f(3) = -1 < 0, \quad f(4) = 4 > 0$$

であるから，

$A \iff B$: 必要十分条件 (ハ) (答)

2

- (1) $x > y \implies x^2 > y^2$ は偽 (反例: $x = 1, y = -2$),
 $x^2 > y^2 \implies x > y$ は偽 (反例: $x = -1, y = 0$)

であるから,

必要条件でも十分条件でもない。 **エ** (答)

- (2) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $x^2 + y^2 > 0$ であるから,

$$x^2 > y^2 \iff x^2 - y^2 > 0 \iff (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) > 0 \iff x^4 > y^4$$

\therefore 必要十分条件 **ウ** (答)

- (3) 真理集合をそれぞれ図示すると、次図の網目部分(境界を含まない)



となって,

$$\{(x, y) \mid x + y > 2\} \subsetneq \{(x, y) \mid x > 1 \text{ または } y > 1\}$$

であるから, $x + y > 2$ は, $x > 1$ または $y > 1$ であるための

十分条件であるが, 必要条件でない。 **イ** (答)

- (4) 真理集合をそれぞれ図示すると、次図の網目部分(境界を含まない)



となって,

$$\{(x, y) \mid x < 1 \text{ または } y < 1\} \supsetneq \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

であるから, $x < 1$ または $y < 1$ は, $x^2 + y^2 < 1$ であるための

必要条件であるが, 十分条件でない。 **ア** (答)

3 (*) $\iff -2 \leq c \leq 2$

(1) $c \leq 2 \not\iff (*)$

であるから, $c \leq 2$ であることは (*) であるための

(イ) 必要条件であるが, 十分条件ではない。(答)

(2) $c^2 - 2 \leq 0 \iff -\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2} \not\iff (*)$

であるから, $c^2 \leq 2$ であることは (*) であるための

(ロ) 十分条件であるが, 必要条件ではない。(答)

(3) 「すべての実数 x に対して $x^4 - c \geq 0$ 」 \iff (最小値) $= -c \geq 0 \iff c \leq 0$

であるから, (*) とは互いに

(二) 必要条件でも十分条件でもない。(答)

(4) 「ある実数 x があり $(x-1)^2 + c^2 \leq 4$ 」 \iff (最小値) $= c^2 \leq 4$

$\iff -2 \leq c \leq 2$

であるから,

(ハ) 必要十分条件である。(答)

(5) 「 $x < 1$ ならば $cx < 2$ 」 $\iff \{x \mid x < 1\} \subset \{x \mid cx < 2\}$

$\iff c = 0$ または “ $c > 0$ かつ $1 \leq \frac{2}{c}$ ”

$\iff 0 \leq x \leq 2 \not\iff (*)$

であるから, $x < 1$ ならば $cx \leq 2$ であることは (*) であるための

(ロ) 十分条件であるが, 必要条件ではない。(答)

(6) 「 x の 2 次方程式 $x^2 + cx + 1 = 0$ は実数解をもたない」

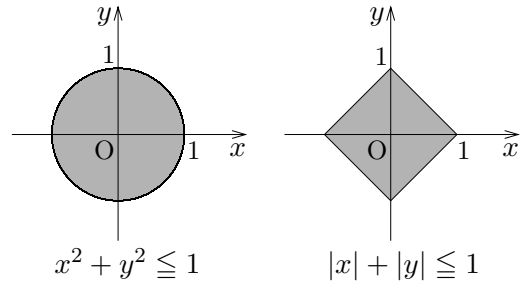
\iff (判別式) $= c^2 - 4 < 0 \iff -2 < c < 2 \not\iff (*)$

であるから, (*) であるための

(ロ) 十分条件であるが, 必要条件ではない。(答)

4

- (1) xy 平面上における領域の包含関係を考えることにより, $x^2 + y^2 \leq 1$ であることは, $|x| + |y| \leq 1$ であるための必要条件であるが, 十分条件ではない。



(答) ②

- (2) $|x + y| \leq 1 \iff -1 \leq x + y \leq 1$, $|x| + |y| \leq 1 \iff y \leq -|x| + 1$
 xy 平面上において領域の包含関係はないから, $|x + y| \leq 1$ であることは, $|x| + |y| \leq 1$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

(答) ④

- (3) $(x + y)^2 \leq 1 \iff |x + y| \leq 1$
 $(x + y)^2 \leq 1$ であることは $|x + y| \leq 1$ であるための必要十分条件。

(答) ①

- (4) $\frac{1}{|x - y|} \geq 1 \iff 0 < |x - y| \leq 1 \iff |x - y| \leq 1$

であるから, $\frac{1}{|x - y|} \geq 1$ であることは, $|x - y| \leq 1$ であるための十分条件であるが, 必要条件ではない。

(答) ③

- (5) $\sqrt{x + y} \leq 1 \iff 0 \leq x + y \leq 1$, $\sqrt{x - y} \leq 1 \iff 0 \leq x - y \leq 1$
 より

$$\sqrt{x + y} \leq 1 \text{ かつ } \sqrt{x - y} \leq 1 \iff 0 \leq x^2 - y^2 \leq 1 \iff \sqrt{x^2 - y^2} \leq 1$$

(←の反例: $x + y = x - y = -1$)

であるから, $\sqrt{x + y} \leq 1$ かつ $\sqrt{x - y} \leq 1$ であることは, $\sqrt{x^2 - y^2} \leq 1$ であるための十分条件であるが, 必要条件ではない。

(答) ③

- (6) xy 平面上に図示すると同じ領域になるから, $|x| + |y| \leq 1$ であることは, $|x + y| \leq 1$ かつ $|x - y| \leq 1$ であるための必要十分条件。

(答) ①

- (7) $(x - y)^2 \leq 1 \iff -1 \leq x - y \leq 1 \iff 0 \leq x - y \leq 1 \iff \sqrt{x^2 - y^2} \leq 1$
 であるから, $(x - y)^2 \leq 1$ であることは $\sqrt{x - y} \leq 1$ であるための必要条件であるが, 十分条件ではない。

(答) ②

- (8) $\frac{1}{x^2 - y^2} \leq 1 \iff x^2 - y^2 < 0$ または $x^2 - y^2 \geq 1 \iff x^2 - y^2 \geq 1$

であるから, $\frac{1}{x^2 - y^2} \leq 1$ であることは $x^2 - y^2 \geq 1$ であるための必要条件であるが, 十分条件ではない。

(答) ②

5

(a) $p \not\leftrightarrow \angle B \text{が直角} \iff q$

であるから,

$\boxed{1}$. p は q であるための必要条件であり, 十分条件でない。(答)
(ア)

(b) a, b は有理数であるから,

ある正の整数 c が存在して ac, bc は整数

となる。2 は素数であり, $2(bc)^2$ は 0 でない限り平方数とならないから,

$$p: a^2 - 2b^2 = 0 \iff a^2 = 2b^2$$

$$\iff (ac)^2 = 2(bc)^2$$

$$\iff ac = bc = 0 \iff q: a = b = 0$$

よって,

$\boxed{3}$. p は q であるための必要十分条件である。(答)
(イ)

(c) $\sin x = a, \sin y = b$ とおくと, $0^\circ < x < 90^\circ, 0^\circ < y < 90^\circ$ のもとで,

$$p \iff a = \frac{1}{2}b \iff b^2 = 4a^2$$

$$q \iff \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}$$

$$\iff \sqrt{3} a \sqrt{1-b^2} = b \sqrt{1-a^2}$$

$$\iff 3a^2(1-b^2) = b^2(1-a^2) \iff b^2 = \frac{3a^2}{2a^2+1}$$

であるから,

$\boxed{4}$. p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。(答)
(ウ)

(d) 正の数 z を固定して $x = z^y + z^{-y}$ とおくと,

$$z^{2y} - xz^y + 1 = 0 \quad \therefore z^y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

$x > 2, z > 1$ とすると,

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} > \frac{x}{2} > 1, \quad y = \log_z \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} > 0$$

$x = 2$ のときは $z = 1$ とすれば, 任意の正の数 y に対して $x = 1^y + 1^{-y}$

$\therefore p \Rightarrow q$ は真

$x = z^y + z^{-y} (y > 0, z > 0)$ ならば, 相加・相乗平均の不等式より

$$x \geq 2\sqrt{z^y \cdot z^{-y}} = 2$$

となつて, $q \Rightarrow p$ も真であるから,

$\boxed{3}$. p は q であるための必要十分条件である。(答)
(エ)