

方程式 $x^4 + 10x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

定理 不定方程式

$$x^4 + 10x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

定理の証明

(1) を満たす自然数 x, y, z が存在すると仮定して、そのうち

$$x + y \text{ が最小}^{\text{注1}}$$

となる場合を考えることにする。

$d = \gcd(x, y)$ とすると、(1) より $d^4 \mid z^2$ であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し、

$$x_1^4 + 10x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

を満たすから、

$$x \text{ と } y \text{ が互いに素}$$

であるとして証明すれば十分である。

ここで、 x と y がともに奇数であるとすれば、

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

となって、 x^2, y^2 はそれぞれ 16 を法として 1 または 9 と合同であり、そのいずれの場合も

$$x^4 \equiv 1, \quad 10x^2y^2 \equiv 10, \quad y^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

となるが、 $z^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{16}$ より (1) が成り立たないから、

$$x \text{ と } y \text{ の偶奇は異なる。}$$

対称性より

$$x \text{ が奇数, } y \text{ が偶数}$$

であるとしてよい。

(1) を変形して

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 + 8x^2y^2 &= z^2 \\ 8x^2y^2 &= (z + x^2 + y^2)(z - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2)$$

$z + x^2 + y^2$ と $z - x^2 - y^2$ はともに偶数であるが、

$$z + x^2 + y^2 - (z - x^2 - y^2) = 2(x^2 + y^2) \equiv 2 \pmod{4}$$

より

$$z + x^2 + y^2, \quad z - x^2 - y^2 \text{ の一方は } 4 \text{ で割れ, 他方は } 4 \text{ で割れない。}$$

1° $4 \nmid z - x^2 - y^2$, $4 \mid z + x^2 + y^2$ のとき

$$\frac{z - x^2 - y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数})^{\text{注2}}$$

とおくと, $2 \mid m$, $4 \nmid m$, $2 \nmid n$ であり,

$$z = \frac{m+n}{n}x^2 + y^2$$

(1)に代入すると

$$\begin{aligned} x^4 + 10x^2y^2 &= \frac{(m+n)^2}{n^2}x^4 + 2 \cdot \frac{m+n}{n}x^2y^2 \\ \frac{8n-2m}{n}x^2y^2 &= \frac{m^2+2mn}{n^2}x^4 \\ \therefore \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m(m+2n)}{2n(4n-m)} = \frac{m(m+2n)}{4} \cdot \frac{1}{n\left(2n - \frac{m}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3)$$

$\gcd(m, n) = 1$, $2 \mid m$, $4 \nmid m$, $2 \nmid n$ より

$$\begin{aligned} \gcd(m, 4n-m) &= \gcd(m, 4n) = \gcd(m, 4) = 2 \\ \gcd(m+2n, n) &= \gcd(m, n) = 1 \\ \gcd(m+2n, 4n-m) &= \gcd(m+2n, 6n-(m+2n)) \\ &= \gcd(m+2n, 6n) \\ &= \gcd(m+2n, 6) \\ &= 2 \text{ または } 6 \\ \gcd(m, m+2n) &= \gcd(m, 2n) = \gcd(m, 2) = 2 \\ \gcd(n, 4n-m) &= \gcd(n, m) = 1 \end{aligned}$$

IA $4 \nmid z - x^2 - y^2$, $\gcd(m+2n, 4n-m) = 1$ のとき

(3)より

$$\frac{m}{2} = a^2, \quad \frac{m+2n}{2} = b^2, \quad n = c^2, \quad 2n - \frac{m}{2} = d^2$$

を満たすような, どの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d が存在し, $2 \mid m$, $4 \nmid m$, $2 \nmid n$ より

a, c, d は奇数, b は偶数

である。 m, n を消去すると

$$\frac{m+2n}{2} = a^2 + c^2 = b^2$$

が得られるが, $a^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $b^2 \equiv 0 \pmod{4}$ であるから矛盾する。

IB $4 \nmid z - x^2 - y^2$, $\gcd(m+2n, 4n-m) = 6$ のとき

(3)より

$$\frac{m}{2} = a^2, \quad \frac{m+2n}{2} = 3b^2, \quad n = c^2, \quad 2n - \frac{m}{2} = 3d^2$$

を満たすような, どの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d が存在し, $2 \mid m, 4 \nmid m, 2 \nmid n$ より

a, c, d は奇数, b は偶数

である。 m, n を消去すると

$$a^2 + c^2 = 3b^2, \quad 2c^2 - a^2 = 3d^2$$

が得られるが, $a^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{4}, b^2 \equiv 0 \pmod{4}$ であるから, いずれも矛盾する。

2° $4 \nmid z + x^2 + y^2, 4 \mid z - x^2 - y^2$ のとき

$$\frac{z + x^2 + y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数})$$

とおくと, $2 \mid m, 4 \nmid m, 2 \nmid n$ であり,

$$z = \frac{m-n}{n}x^2 - y^2$$

(1)に代入すると

$$\begin{aligned} x^4 + 10x^2y^2 &= \frac{(m-n)^2}{n^2}x^4 - 2 \cdot \frac{m-n}{n}x^2y^2 \\ \frac{2m+8n}{n}x^2y^2 &= \frac{m^2-2mn}{n^2}x^4 \\ \therefore \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m(m-2n)}{2n(m+4n)} = \frac{m(m-2n)}{4} \cdot \frac{1}{n\left(\frac{m}{2} + 2n\right)} \end{aligned} \quad (4)$$

$\gcd(m, n) = 1, 2 \mid m, 4 \nmid m, 2 \nmid n$ より

$$\gcd(m, m+4n) = \gcd(m, 4n) = \gcd(m, 4) = 2$$

$$\gcd(m-2n, n) = \gcd(m, n) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(m-2n, m+4n) &= \gcd(m-2n, (m-2n)+6n) \\ &= \gcd(m-2n, 6n) \\ &= \gcd(m-2n, 6) \\ &= 2 \text{ または } 6 \end{aligned}$$

$$\gcd(m, m-2n) = \gcd(m, 2n) = \gcd(m, 2) = 2$$

$$\gcd(n, m+4n) = \gcd(n, m) = 1$$

IIA $4 \nmid z + x^2 + y^2, \gcd(m-2n, m+4n) = 2$ のとき

(4)より

$$\frac{m}{2} = a^2, \quad \frac{m-2n}{2} = b^2, \quad n = c^2, \quad \frac{m}{2} + 2n = d^2$$

を満たすような, どの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d が存在し, $2 \mid m, 4 \nmid m, 2 \nmid n$ より

$$a, c, d \text{ は奇数, } b \text{ は偶数}$$

である。 m, n を消去すると

$$\frac{m}{2} + 2n = a^2 + 2c^2 = d^2$$

が得られるが, $a^2 \equiv c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから矛盾する。

II B $4 \nmid z + x^2 + y^2, \gcd(m-2n, m+4n) = 6$ のとき

(4)より

$$\frac{m}{2} = a^2, \quad \frac{m-2n}{2} = 3b^2, \quad n = c^2, \quad \frac{m}{2} + 2n = 3d^2 \quad (5)$$

を満たすような, どの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d が存在し, $2 \mid m, 4 \nmid m, 2 \nmid n$ より

$$a, c, d \text{ は奇数, } b \text{ は偶数}$$

である。 m, n を消去すると

$$a^2 - c^2 = 3b^2 \quad (6)$$

$$a^2 + 2c^2 = 3d^2 \quad (7)$$

が得られるが, (7) - (6)より

$$3c^2 = 3d^2 - 3b^2$$

$$b^2 + c^2 = d^2$$

ピタゴラス方程式についての定理^{注3}を適用すると,

$$b = 2k\ell, \quad c = k^2 - \ell^2, \quad d = k^2 + \ell^2, \quad k \not\equiv \ell \pmod{2} \quad (8)$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在し, (6)または(7)に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 &= 3(2k\ell)^2 + (k^2 - \ell^2)^2 \\ &= k^4 + 10k^2\ell^2 + \ell^4 \end{aligned} \quad (9)$$

x と y は互いに素であるから, (4), (5)より

$$x = cd, \quad y = ab \quad (10)$$

である。(8), (10)より

$$k + \ell \leq k^2 + \ell^2 = d \leq cd < cd + ab = x + y$$

であるから, (9)が成り立つことは $x + y$ の最小性に反する。 ■

注1 対称性を崩さないことで論じやすくするための工夫である。ちなみに，アイデアのもととなった[3]では，対称性のためというより，大小関係を辿る際に一方の変数だけで考えるのが難しかったためである。

注2 (2)より， $z - x^2 - y^2 > 0$ である。

注3 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき，

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は，[1] pp.20-22 または [2] 注5 を参照のこと。

参考文献

- [1] 足立恒雄，フェルマーの大定理，筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生，方程式 $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2019)，
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7x2y2+y4=z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生，方程式 $(5x^2 - 4y^2)(5y^2 - 4x^2) = z^2$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2020)，
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(5x2-4y2\)\(5y2-4x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(5x2-4y2)(5y2-4x2)=z2.pdf)
- [4] 大塚美紀生，方程式 $x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2020)，
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+9x2y2+y4=z2.pdf>