

# 方程式 $x^4 + 11x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

定理 不定方程式

$$x^4 + 11x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

定理の証明

(1) を満たす自然数  $x, y, z$  が存在すると仮定して、そのうち  $z$  が最小

となる場合を考えることにする。

$d = \gcd(x, y)$  とすると、(1) より  $d^4 \mid z^2$  であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2z_1$$

となる自然数  $x_1, y_1, z_1$  が存在し、

$$x_1^4 + 11x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

を満たすから、

$x$  と  $y$  が互いに素

であるとして証明すれば十分である。

ここで、 $x$  と  $y$  がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{8}$  より

$$x^2 + 11x^2y^2 + y^4 \equiv 1 + 11 + 1 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって、(1) に反するから

$x$  と  $y$  の偶奇は異なる。

対称性より

$x$  が奇数、 $y$  が偶数

であるとしてよい。

(1) を変形すると

$$(x^2 + y^2)^2 + (3xy)^2 = z^2 \tag{2}$$

$x^2 + y^2$  と  $3xy$  が共通な素因数  $p$  をもつとすれば、 $p \mid 3xy$  と素数の性質より

$$p = 3 \text{ または } p \mid x \text{ または } p \mid y$$

$3 \mid x^2 + y^2$  のとき、平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であるから、 $x$  と  $y$  がともに 3 で割り切れ、互いに素であることに反する。

$p \mid x$  または  $p \mid y$  のとき、 $p \mid x^2 + y^2$  より、いずれの場合も  $p \mid x$  かつ  $p \mid y$  となって互いに素に反する。よって、

$$x^2 + y^2 \text{ と } 3xy \text{ は互いに素}$$

である。

$x^2 + y^2$  が奇数,  $3xy$  が偶数であることを考え, (2) にピタゴラス方程式の定理<sup>注1</sup>を適用すると,

$$x^2 + y^2 = m^2 - n^2 \quad (3)$$

$$3xy = 2mn \quad (4)$$

を満たす互いに素で偶奇が異なる自然数  $m, n$  が存在する。 $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}$  であるから, (3) より

$$m \text{ は奇数, } n \text{ は偶数}$$

である。

$$\gcd(x, m) = s \text{ とおくと}$$

$$x = st, \quad m = su \quad (5)$$

を満たす互いに素な自然数  $t, u$  が存在する。(4) より

$$3ty = 2un$$

$t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$3y = uv, \quad 2n = tv \quad (6)$$

を満たす自然数  $v$  が存在する。(5), (6) を (3) に代入して

$$s^2 t^2 + \frac{u^2 v^2}{9} = s^2 u^2 - \frac{t^2 v^2}{4}$$

$$s^2(u^2 - t^2) = \frac{4u^2 + 9t^2}{36} v^2$$

$u > t > 0$  であり,

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{4u^2 + 9t^2}{36(u^2 - t^2)} = \frac{(4u^2 + 9t^2)(u^2 - t^2)}{36(u^2 - t^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$(4u^2 + 9t^2)(u^2 - t^2) = w^2 \quad (7)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\gcd(t^2, u^2 - t^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$$\gcd(4u^2 + 9t^2, u^2 - t^2) = \gcd(4(u^2 - t^2) + 13t^2, u^2 - t^2)$$

$$= \gcd(13t^2, u^2 - t^2)$$

$$= \gcd(13, u^2 - t^2)$$

$$= 1 \text{ または } 13$$

であるから,

$$(4u^2 + 9t^2, u^2 - t^2, w) = (13k^2, 13\ell^2, 13k\ell) \text{ または } (k^2, \ell^2, k\ell)$$

を満たす互いに素な自然数  $k, \ell$  が存在する。

$x$  と  $m$  はともに奇数であるから, (5) より

$$t \text{ と } u \text{ はともに奇数}$$

であり,

$$4u^2 + 9t^2 \equiv 4 + 9 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって,  $4u^2 + 9t^2$  は平方数になることはないから

$$4u^2 + 9t^2 = 13k^2 \quad (8)$$

$$u^2 - t^2 = 13\ell^2 \quad (9)$$

の場合に限られる。(8) - (9) × 4 より

$$\begin{aligned} 13t^2 &= 13k^2 - 13 \cdot 4\ell^2 \\ t^2 + 4\ell^2 &= k^2 \end{aligned} \quad (10)$$

(8) + (9) × 9 より

$$\begin{aligned} 13u^2 &= 13k^2 + 13 \cdot 9\ell^2 \\ u^2 &= k^2 + 9\ell^2 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで  $t$  と  $\ell$  が共通な素因数  $p$  をもつとすれば, (9) より  $p|u$  となって  $t$  と  $u$  が互いに素であることに反するから,

$t$  と  $\ell$  は互いに素

である。さらに,  $t$  は奇数であることより

$t$  と  $2\ell$  は互いに素

であるから, (10) にピタゴラス方程式の定理<sup>注1</sup>を適用することができて,

$$t = \alpha^2 - \beta^2, \quad 2\ell = 2\alpha\beta, \quad k = \alpha^2 + \beta^2$$

を満たす互いに素な自然数  $\alpha, \beta$  が存在する。(11) に代入すると

$$u^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 9(\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + 11\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \quad (12)$$

(6), (2) より

$$u^2 \leq u^2v^2 = (3y)^2 \leq (3xy)^2 < z^2$$

となるから, (12) の成立は  $z$  の最小性に反する。 ■

注1 互いに素な自然数  $x, y, z$  がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数  $m, n$  が存在する。

証明は, [1] pp.20 - 22 または [3] 注5 を参照のこと。

## 参考文献

- [ 1 ] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [ 2 ] 大塚美紀生, 方程式  $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2019),  
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-2y2\)\(3y2-2x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-2y2)(3y2-2x2)=z2.pdf)
- [ 3 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2019),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7x2y2+y4=z2.pdf>