

# 方程式 $x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

本稿では、ディオファントス方程式  $x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解(正の原始解)が無数に存在することを報告する。その証明は初等的ではあるが、すべての解を完全に求めるには大掛かりなものとなった。証明の簡素化、体系化が望まれるところだが、議論が広がったおかげで本論以外にも興味深い結果(→ [5])が得られた。

本稿は 2021 年 1 月 17 日に一度発表しているが、その後証明に不具合が見つかったため、修正したものを今回改めて発表する次第である。

定理 1  $g, h$  を自然数とすると、 $2g^2 - h^2$  と  $14g^2 - 5h^2$  がともに平方数ならば、 $g = h$  である。

定理 2 不定方程式

$$x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2$$

の整数解は無数にあり、正の原始解<sup>注1</sup>  $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$  で  $x$  が偶数<sup>注2</sup> であるものは、次の漸化式で定まるもので尽くされる。

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = 23, \\ x_{n+1} &= 2x_n y_n z_n, \quad y_{n+1} = |x_n^4 - y_n^4|, \quad z_{n+1} = z_n^4 - 140x_n^4 y_n^4 \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

定理 1 の証明

$$2g^2 - h^2 = a^2 \tag{1}$$

$$14g^2 - 5h^2 = b^2 \tag{2}$$

とおく。ただし、 $a, b$  は自然数であるとする。

$\gcd(g, h) = d$  とおくと、(1), (2) より  $d^2 | a^2$ ,  $d^2 | b^2$  であるから、

$$g = dg_1, \quad h = dh_1, \quad a = da_1, \quad b = db_1$$

を満たす自然数  $g_1, h_1, a_1, b_1$  が存在して

$$2g_1^2 - h_1^2 = a_1^2, \quad 14g_1^2 - 5h_1^2 = b_1^2$$

が成り立つ。よって、

$g$  と  $h$  は互いに素

であるとして定理を証明すればよい。ここで、 $a$  が偶数であるとすれば、(1) より  $h$  は偶数であり、 $2^2 | 2g^2$  より  $g$  も偶数となって互いに素であることに反するから、

$a$  は奇数

である。

(1)より

$$14g^2 - 5h^2 = 14g^2 - 5(2g^2 - a^2) = 4g^2 + 5a^2$$

であるから, (2)より

$$4g^2 + 5a^2 = b^2 \tag{3}$$

(1), (3)より

$$8g^4 + 6g^2a^2 - 5a^4 = (2g^2 - a^2)(4g^2 + 5a^2) = (hb)^2$$

が成り立ち,  $a$ は奇数であるから, [5]の定理より

$$a = g$$

であり, (1)より

$$g = h$$

である。 ■

### 定理2の証明

互いに素な自然数  $x, y, z$ <sup>注3</sup>が

$$x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{4}$$

を満たすとする。このとき,

$x$ と $y$ は互いに素<sup>注3</sup>

である。ここで,  $x$ と $y$ がともに奇数であるとすれば,  $x^2 \equiv y^2 \equiv 1, z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ となつて(4)が成り立たないから,  $x$ と $y$ の偶奇は異なる。 $x$ と $y$ について対称であることを考えて

$x$ は偶数,  $y$ は奇数,  $z$ は奇数

として正の原始解を求めれば十分である。

(4)を変形して

$$\begin{aligned} (x^2 + 6y^2)^2 - 35y^4 &= z^2 \\ (x^2 + 6y^2)^2 - z^2 &= 35y^4 \\ (x^2 + 6y^2 + z)(x^2 + 6y^2 - z) &= 35y^4 \end{aligned} \tag{5}$$

ここで,  $x^2 + 6y^2 + z$ と $x^2 + 6y^2 - z$ が共通の素因数  $p$ をもつとすれば,  $p$ は奇素数であり,  $p|2(x^2 + 6y^2), p^2|35y^4 \implies p|x^2 + 6y^2, p|y \implies p|x, p|y$ となつて, 互いに素であることに反するから

$x^2 + 6y^2 + z$ と $x^2 + 6y^2 - z$ は互いに素

である。(5)より

$$\begin{aligned} (x^2 + 6y^2 + z, x^2 + 6y^2 - z, y) &= (35a^4, b^4, ab), \\ &= (b^4, 35a^4, ab), \\ &= (7a^4, 5b^4, ab), \\ &= (5b^4, 7a^4, ab) \end{aligned}$$

のいずれかを満たす互いに素な正の奇数  $a, b$ が存在し,

$$y = ab \tag{6}$$

$$2(x^2 + 6y^2) = 35a^4 + b^4 \text{ または } 7a^4 + 5b^4$$

が成り立つ。  $y$  を消去すると

$$2x^2 = 35a^4 - 12a^2b^2 + b^4 = (5a^2 - b^2)(7a^2 - b^2)$$

または

$$2x^2 = 7a^4 - 12a^2b^2 + 5b^4 = (a^2 - b^2)(7a^2 - 5b^2)$$

I  $2x^2 = (5a^2 - b^2)(7a^2 - b^2)$  のとき

$5a^2 - b^2 \equiv 0, 7a^2 - b^2 \equiv 2 \pmod{4}$  より  $\frac{5a^2 - b^2}{4}, \frac{7a^2 - b^2}{2}$  は整数であり,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{7a^2 - b^2}{2}$$

$\frac{7a^2 - b^2}{2} - 2 \cdot \frac{5a^2 - b^2}{4} = a^2$  と  $5 \cdot \frac{7a^2 - b^2}{2} - 14 \cdot \frac{5a^2 - b^2}{4} = b^2$  が互いに素である

ことより

$$\frac{5a^2 - b^2}{4} \text{ と } \frac{7a^2 - b^2}{2} \text{ は互いに素}$$

であるから,

$$(x, 5a^2 - b^2, 7a^2 - b^2) = (2gh, 4g^2, 2h^2) \text{ または } (2gh, -4g^2, -2h^2)$$

を満たす互いに素な自然数  $g, h$  が存在する。

$5a^2 - b^2 \equiv 4, 7a^2 - b^2 \equiv 6 \pmod{8}$  であるから

$$x = 2gh \tag{7}$$

$$5a^2 - b^2 = -4g^2 \tag{8}$$

$$7a^2 - b^2 = -2h^2 \tag{9}$$

に定まる。(9) - (8) より

$$2a^2 = -2h^2 + 4g^2$$

$$2g^2 - h^2 = a^2 \tag{10}$$

(9)  $\times$  5 - (8)  $\times$  7 より

$$2a^2 = -10h^2 + 28g^2$$

$$14g^2 - 5h^2 = b^2 \tag{11}$$

(10) かつ (11) に定理 1 を適用すると

$$g = h, a = g, b = 3g$$

(7), (6) より

$$x = 2g^2, y = 3g^2$$

$x$  と  $y$  は互いに素であるから

$$x = 2, y = 3$$

(4) より

$$z^2 = 2^4 + 12 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 3^4 = 529 \text{ したがって } z = 23$$

II  $2x^2 = (a^2 - b^2)(7a^2 - 5b^2)$  のとき

$a^2 - b^2 \equiv 0, 7a^2 - 5b^2 \equiv 2 \pmod{4}$  より  $\frac{a^2 - b^2}{4}, \frac{7a^2 - 5b^2}{2}$  は整数であり,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{7a^2 - 5b^2}{2}$$

$\frac{7a^2 - 5b^2}{2} - 10 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4} = a^2$  と  $\frac{7a^2 - 5b^2}{2} - 14 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4} = b^2$  は互いに素であることより

$$\frac{a^2 - b^2}{4} \text{ と } \frac{7a^2 - 5b^2}{2} \text{ は互いに素}$$

であるから,

$$(x, a^2 - b^2, 7a^2 - 5b^2) = (2gh, 4g^2, 2h^2) \text{ または } (2gh, -4g^2, -2h^2)$$

を満たす互いに素な自然数  $g, h$  が存在する。

$a^2 - b^2 \equiv 0, 7a^2 - 5b^2 \equiv 2 \pmod{8}$  であるから

$$x = 2gh \tag{12}$$

$$a^2 - b^2 = 4g^2 \tag{13}$$

$$7a^2 - 5b^2 = 2h^2 \tag{14}$$

に定まる。(13)にピタゴラス方程式の定理<sup>注4</sup>を適用すると

$$a = m^2 + n^2, b = m^2 - n^2, 2g = 2mn \tag{15}$$

を満たす互いに素な偶奇の異なる自然数  $m, n$  が存在する。

(14)に代入すると

$$\begin{aligned} 7(m^2 + n^2)^2 - 5(m^2 - n^2)^2 &= 2h^2 \\ m^4 + 12m^2n^2 + n^4 &= h^2 \end{aligned} \tag{16}$$

が得られる。

逆に辿ると, (16)を満たす自然数  $m, n, h$  に対して, (15)より

$$a = m^2 + n^2, b = |m^2 - n^2|^{\text{注6}}, g = mn$$

(12), (6)より

$$x = 2mnh \tag{17}$$

$$y = (m^2 + n^2)|m^2 - n^2|^{\text{注6}} = |m^4 - n^4| \tag{18}$$

(4), (16), (17), (18)より

$$\begin{aligned} z^2 &= x^4 + 12x^2y^2 + y^4 \\ &= 16m^4n^4(m^4 + 12m^2n^2 + n^4)^2 \\ &\quad + 12 \cdot 4m^2n^2(m^4 + 12m^2n^2 + n^4)(m^4 - m^4)^2 \\ &\quad + (m^4 - n^4)^4 \\ &= 16m^4n^4\{(m^4 + n^4)^2 + 24m^2n^2(m^4 + n^4) + 144m^4n^4\} \\ &\quad + 48m^2n^2(m^4 + n^4 + 12m^2n^2)\{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4n^4\} \\ &\quad + \{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4n^4\}^2 \end{aligned}$$

$m^4 + n^4 = \alpha, m^2n^2 = \beta$  とおくと

$$\begin{aligned}
z^2 &= 16\beta^2(\alpha^2 + 24\alpha\beta + 144\beta^2) + 48\beta(\alpha + 12\beta)(\alpha^2 - 4\beta^2) + (\alpha^2 - 4\beta^2)^2 \\
&= 16(\alpha^2\beta^2 + 24\alpha\beta^3 + 144\beta^4) + 48(\alpha^3\beta + 12\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 - 48\beta^4) \\
&\quad + \alpha^4 - 8\alpha^2\beta^2 + 16\beta^4 \\
&= \alpha^4 + 48\alpha^3\beta + (24^2 + 8)\alpha^2\beta^2 + 48 \cdot 4\alpha\beta^3 + 16\beta^4 \\
&= (\alpha^2 + 4\beta^2)^2 + 48(\alpha^3\beta + 12\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3) \\
&= (\alpha^2 + 4\beta^2)^2 + 48\alpha\beta(\alpha^2 + 4\beta^2) + 24^2\alpha^2\beta^2 \\
&= (\alpha^2 + 24\alpha\beta + 4\beta^2)^2
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
z &= \alpha^2 + 24\alpha\beta + 4\beta^2 \\
&= (m^4 + n^4)^2 + 24m^2n^2(m^4 + n^4) + 4m^4n^4 \\
&= (m^4 + 12m^2n^2 + n^4)^2 - 140m^4n^4 \\
&= (h^2)^2 - 140m^4n^4
\end{aligned} \tag{19}$$

(16)を満たす  $m, n$  のうちの偶数が 4 の倍数のときは II の議論を繰り返すことができ、4 で割れない偶数のときは I より

$$(m, n, h) = (2, 3, 23) \text{ または } (3, 2, 23)$$

に限られる<sup>注5</sup>から、 $x$  が偶数である正の原始解は

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = 23$$

から始めて、(17), (18), (19) による漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n y_n z_n \\ y_{n+1} = |x_n^4 - y_n^4| \\ z_{n+1} = z_n^4 - 140x_n^4 y_n^4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる  $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$  に限られる。(12), (4) より

$$h^2 < 4g^2 h^2 = x^2 < x^4 < z^2 \text{ したがって } z_n < z_{n+1}$$

であるから、正の原始解は無数に存在する。 ■

注1 自然数解  $(x_0, y_0, z_0)$  が一つ見つかり、任意の整数  $d$  に対して  $(x_0d, y_0d, z_0d^2)$  も整数解となるから、単に無数にあるというだけでは意味がない。原始解  $(x, y, z)$  が互いに素である整数解が無数個ということになれば、本質的な意味で無限個ということになる。

注2  $x, y$  がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1, z^2 \equiv 0 \pmod{4}$  より

$$x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2$$

は成り立たないから、互いに素であるとすれば  $x$  と  $y$  の偶奇は異なる。 $x$  と  $y$  について対称なので、 $x$  が偶数の場合を求めるだけで一般に求めたことになる。

注3 3数が互いに素であることとそのうちの2数が互いに素であることは意味が異なる。例えば、3数 6, 10, 15 は互いに素であるが、そのうちのどの2数も互いに素ではない。(4)が成り立つ前提では、 $x$  と  $y$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p^4 | z^2$  より  $z$  も  $p$  で割り切れてしまうので、 $x$  と  $y$  は互いに素であることがわかる。

注4 互いに素な自然数  $x, y, z$  がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき、

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数  $m, n$  が存在する。

証明は読者に委ねるが、必要ならば [1] pp.20 - 22 などを参照されるとよい。

注5 互いに素な自然数  $x, y, z$  が

$$x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{4}$$

を満たすところから始めると、 $x$  は (7) と (12) のいずれかとなる。(7)の場合は、その後  $g = h = 1$  が導かれ、 $x = 2$  だったことになる。(12)の場合は、その後  $g = mn$  は偶数であることがわかるから、 $x = 2gh$  は4の倍数である。

注6 (15)において  $b = m^2 - n^2$  は  $b$  に応じて  $m, n$  が決まるが、(16)において先に  $m, n$  を定めると、 $m^2 - n^2 > 0$  の場合と  $n^2 - m^2 > 0$  の場合が起こり得る。

## 参考文献

- [ 1 ] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [ 2 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2014),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+4x2y2+y4=z2.pdf>
- [ 3 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 11x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2020),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+11x2y2+y4=z2.pdf>
- [ 4 ] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$  の原始解,  
早稲田数学フォーラム (2021),  
[http://wasmath.la.coocan.jp/x4+8x2y2+y4=z2\\_prim.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/x4+8x2y2+y4=z2_prim.pdf)
- [ 5 ] 大塚美紀生, 方程式  $8x^4 + 6x^2y^2 - 5y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2022),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/8x4+6x2y2-5y4=z2.pdf>