

方程式 $x^4 + 13x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

定理 不定方程式

$$x^4 + 13x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

定理の証明

(1) を満たす自然数 x, y, z が存在すると仮定して矛盾を導く。

$\delta = \gcd(x, y)$ とすると, (1) より $\delta^4 \mid z^2$ であるから

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta^2 z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し,

$$x_1^4 + 13x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つから,

x と y が互いに素

であるとして証明すれば十分である。

ここで, x と y がともに奇数であるとするれば, z も奇数であり,

$$x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

$$x^2 + 13x^2y^2 + y^4 \equiv 1 + 13 + 1 \equiv 3 \pmod{4}$$

より (1) が成り立つことに反するから

x と y の偶奇は異なる。

対称性より

x が奇数, y が偶数

であるとしてよい。

(1) を変形すると

$$(x^2 + y^2)^2 + 11x^2y^2 = z^2$$

$$11x^2y^2 = (z + x^2 + y^2)(z - x^2 - y^2) \quad (2)$$

ここで, $3 \mid z + x^2 + y^2$ とすると, (2) より

$$3 \mid 11x^2y^2 \implies 3 \mid xy \implies 3 \mid x \text{ または } 3 \mid y$$

$\gcd(x, y) = 1$ より

$$3 \mid x \text{ ならば } 3 \nmid y, \quad 3 \mid y \text{ ならば } 3 \nmid x$$

であるから

$$(z + x^2 + y^2) - (z - x^2 - y^2) = 2x^2 + 2y^2 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

したがって,

$$3 \mid z + x^2 + y^2 \implies 3 \nmid z - x^2 - y^2$$

が成り立つ。同様に,

$$3 \mid z - x^2 - y^2 \implies 3 \nmid z + x^2 + y^2$$

も成り立つから,

$$z + x^2 + y^2 \text{ と } z - x^2 - y^2 \text{ の少なくとも一方は } 3 \text{ で割れない。}$$

I $3 \nmid z + x^2 + y^2$ のとき

$$\frac{z + x^2 + y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数}) \quad (3)$$

とおくと,

$$m \text{ は } 3 \text{ で割れない偶数, } n \text{ は奇数}$$

であり,

$$z = \frac{m-n}{n}x^2 - y^2$$

(1)に代入すると

$$\begin{aligned} x^4 + 11x^2y^2 &= \frac{(m-n)^2}{n^2}x^4 - 2 \cdot \frac{m-n}{n}x^2y^2 \\ \left(9 + \frac{2m}{n}\right)x^2y^2 &= \frac{m^2 - 2mn}{n^2}x^4 \\ \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m(m-2n)}{n(9n+2m)} \end{aligned} \quad (4)$$

$\gcd(m, n) = 1, 3 \nmid m$ より

$$\begin{aligned} \gcd(m, 9n+2m) &= \gcd(m, 9n) = \gcd(m, 9) = 1 \\ \gcd(m-2n, n) &= \gcd(m, n) = 1 \\ \gcd(m-2n, 9n+2m) &= \gcd(m-2n, 2(m-2n) + 13n) \\ &= \gcd(m-2n, 13n) \\ &= \gcd(m-2n, 13) \\ &= 1 \text{ または } 13 \end{aligned}$$

さらに, m が偶数, n が奇数であることより

$$\begin{aligned} \gcd(m, m-2n) &= \gcd(m, 2n) = \gcd(m, 2) = 2 \\ \gcd(n, 9n+2m) &= \gcd(n, 2m) = \gcd(n, 2) = 1 \end{aligned}$$

であるから, (4)より

$$m = 2a^2, \quad m - 2n = 2b^2, \quad n = c^2, \quad 9n + 2m = d^2 \quad (5)$$

または

$$m = 2a^2, \quad m - 2n = 26b^2, \quad n = c^2, \quad 9n + 2m = 13d^2 \quad (6)$$

が成り立つような, どの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d が存在する。

IA (5) のとき

$n = c^2$ は奇数であり,

$$m - 2n = 2a^2 - 2c^2 = 2b^2$$

より

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ピタゴラス方程式の定理^{註1}を適用すると,

$$a = k^2 + \ell^2, \quad b = 2k\ell, \quad c = k^2 - \ell^2$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数 k, ℓ が存在する。

$9n + 2m = 9c^2 + 4a^2 = d^2$ に代入すると

$$d^2 = 9(k^2 - \ell^2)^2 + 4(k^2 + \ell^2)^2 = 13k^4 - 10k^2\ell^2 + 13\ell^4$$

が成り立たなければならないが, k と ℓ は偶奇が異なるから

$$13k^4 - 10k^2\ell^2 + 13\ell^4 \equiv 13 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって, $d^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であることと矛盾する。

IB (6) のとき

$n = c^2$ は奇数であり,

$$m - 2n = 2a^2 - 2c^2 = 26b^2$$

より

$$a^2 - c^2 = 13b^2 \tag{7}$$

$9n + 2m = 13d^2$ より

$$9c^2 + 4a^2 = 13d^2 \tag{8}$$

(8) - (7) × 4 より

$$13c^2 = 13d^2 - 13 \cdot 4b^2$$

$$(2b)^2 + c^2 = d^2$$

ピタゴラス方程式の定理^{註1}を適用すると,

$$2b = 2k\ell, \quad c = k^2 - \ell^2, \quad d = k^2 + \ell^2$$

を満たす自然数 k, ℓ が存在する。(7)に代入すると

$$a^2 = (k^2 - \ell^2)^2 + 13k^2\ell^2 = k^4 + 11k^2\ell^2 + \ell^4$$

が成り立つが, [3] よりこのような自然数 k, ℓ は存在しないので, 矛盾する。

II $3 \nmid z - x^2 - y^2$ のとき

$$\frac{z - x^2 - y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数})^{\text{註2}} \tag{9}$$

とおくと,

m は 3 で割れない偶数, n は奇数

であり,

$$z = \frac{m+n}{n}x^2 + y^2$$

(1)に代入すると

$$\begin{aligned} x^4 + 11x^2y^2 &= \frac{(m+n)^2}{n^2}x^4 + 2 \cdot \frac{m+n}{n}x^2y^2 \\ \left(9 - \frac{2m}{n}\right)x^2y^2 &= \frac{m^2 + 2mn}{n^2}x^4 \\ \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m(m+2n)}{n(9n-2m)} \end{aligned} \tag{10}$$

$\gcd(m, n) = 1$, $3 \nmid m$ より

$$\begin{aligned} \gcd(m, 9n-2m) &= \gcd(m, 9n) = \gcd(m, 9) = 1 \\ \gcd(m+2n, n) &= \gcd(m, n) = 1 \\ \gcd(m+2n, 9n-2m) &= \gcd(m+2n, 13n-2(m+2n)) \\ &= \gcd(m+2n, 13n) \\ &= \gcd(m+2n, 13) \\ &= 1 \text{ または } 13 \end{aligned}$$

さらに, m が偶数, n が奇数であることより

$$\begin{aligned} \gcd(m, m+2n) &= \gcd(m, 2n) = \gcd(m, 2) = 2 \\ \gcd(n, 9n-2m) &= \gcd(n, 2m) = \gcd(n, 2) = 1 \end{aligned}$$

であるから, (10)より

$$m = 2a^2, \quad m+2n = 2b^2, \quad n = c^2, \quad 9n-2m = d^2 \tag{11}$$

または

$$m = 2a^2, \quad m+2n = 26b^2, \quad n = c^2, \quad 9n-2m = 13d^2 \tag{12}$$

が成り立つような, どの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d が存在する。

IIA (11)のとき

$n = c^2$ は奇数であり,

$$9n - 2m = 9c^2 - 4a^2 = d^2$$

より

$$(2a)^2 + d^2 = (3c)^2$$

ピタゴラス方程式の定理^{注1}を適用すると,

$$2a = 2k\ell, \quad d = k^2 - \ell^2, \quad 3c = k^2 + \ell^2$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在する。ところが, 平方数を3で割った余りは0または1であるから

$$k^2 + \ell^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

より $k \equiv \ell \equiv 0 \pmod{3}$ となって, k と ℓ が互いに素であることに反する。

II B (12) のとき

$$m + 2n = 2a^2 + 2c^2 = 26b^2$$

より

$$a^2 + c^2 = 13b^2 \tag{13}$$

$9n - 2m = 13d^2$ より

$$9c^2 - 4a^2 = 13d^2 \tag{14}$$

(13) \times 9 - (14) より

$$13a^2 = 13 \cdot 9b^2 - 13d^2$$

$$a^2 + d^2 = (3b)^2$$

$n = c^2$ が奇数であるから d が奇数であることを考え、ピタゴラス方程式の定理^{注1}を適用すると

$$a = 2k\ell, \quad d = k^2 - \ell^2, \quad 3b = k^2 + \ell^2$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在する。ところが、平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であるから

$$k^2 + \ell^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

より $k \equiv \ell \equiv 0 \pmod{3}$ となって、 k と ℓ が互いに素であることに反する。 ■

注 1 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき、

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが、必要ならば [1] pp.20 - 22 などを参照されるとよい。

注 2 (2) の等式が成り立つことより $z - x^2 - y^2 > 0$ である、

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 10x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解, 早稲田数学フォーラム (2020), <http://wasmath.la.coocan.jp/x4+10x2y2+y4=z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 11x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解, 早稲田数学フォーラム (2020), <http://wasmath.la.coocan.jp/x4+11x2y2+y4=z2.pdf>