

方程式 $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

本稿では，[4]と同様の手法により次の定理を証明する。

定理 自然数 x, y, z が

$$x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たすならば， $x = y$ が成り立つ。

実は，この定理は既に Ion Cucurezeanu により証明されている。^{注1}
その方針は，

$$x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$$

の両辺を 16 倍すれば，

$$(2x)^4 + 14(2x)^2(2y)^2 + (2y)^4 = 16z^2$$

と表されるから，

$$a = x + y, \quad b = x - y$$

とおくと，

$$(a + b)^4 + 14(a^2 - b^2)^2 + (a - b)^4 = 16z^2$$

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 = z^2$$

と書き換えられるという幸運によるものである。^{注2} 残念ながら，ほとんどの方程式

$$x^4 + kx^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (k \text{ は正の整数定数})$$

では，この変形を活かした証明はできない。

本稿の証明は，いわば別解ということになるが，これまでやってきたように平方数についての性質を積み重ねるといふものである。確かに k ごとに方針は変えなければならぬが，ある程度汎用性をもつ方法である。証明の発想は [4] と同じであるが，直接には [3] の結果を用いている。

定理の証明

$$x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) の中に $x \neq y$ であるものが存在するとして，そのうち z が最小

である場合を考える。

$$\gcd(x, y) = \delta \text{ とすると, } \delta^4 \mid z^2 \text{ より}$$

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta^2 z_1$$

を満たす自然数 x_1, y_1, z_1 が存在して

$$x_1^4 + 14x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つ。 z の最小性より $\delta = 1$ となるから,

x と y は互いに素

である。

(1) を変形すると

$$(x^2 - y^2)^2 + (4xy)^2 = z^2 \quad (2)$$

ここで, $x^2 - y^2$ と xy が共通の素因数 p をもつとすれば, $p \mid xy$ より

$$p \mid x \text{ または } p \mid y$$

であるが, $p \mid x^2 - y^2$ よりいずれの場合も $p \mid x$ かつ $p \mid y$ となって x と y が互いに素であることに反するから,

$$x^2 - y^2 \text{ と } xy \text{ は互いに素}$$

である。

1° x と y の偶奇が異なるとき

対称性より

$$x \text{ は奇数, } y \text{ は偶数}$$

であるとしてよい。 $x^2 - y^2$ は奇数であるから

$$x^2 - y^2 \text{ と } 4xy \text{ は互いに素}$$

であり, (2) にピタゴラス方程式の定理^{注3}を適用すると

$$x^2 - y^2 = m^2 - n^2 \quad \text{注4} \quad (3)$$

$$4xy = 2mn \quad (4)$$

を満たす互いに素な偶奇の異なる自然数 m, n が存在する。

(3) より, $x^2 - y^2 = m^2 - n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから,

$$m \text{ は奇数, } n \text{ が偶数}$$

である。

$$\gcd(x, m) = s \text{ とおくと,}$$

$$x = st, \quad m = su \quad (5)$$

を満たす互いに素な正の奇数 s, t が存在する。(4) より

$$2ty = un$$

t と u は互いに素であるから

$$2y = uv, \quad n = tv \quad (6)$$

を満たす自然数 v が存在する。(5), (6) を (3) に代入して

$$s^2 t^2 - \frac{u^2 v^2}{4} = s^2 u^2 - t^2 v^2$$

$$\frac{4t^2 - u^2}{4} v^2 = s^2 (u^2 - t^2)$$

$u^2 - t^2$ と $4t^2 - u^2$ がともに 0 になることはないから,

$$u^2 - t^2 \neq 0 \text{ かつ } 4t^2 - u^2 \neq 0$$

であり,

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{4t^2 - u^2}{4(u^2 - t^2)} = \frac{(4t^2 - u^2)(u^2 - t^2)}{4(u^2 - t^2)^2}$$

は有理数の平方であるから，

$$(4t^2 - u^2)(u^2 - t^2) = w^2 \quad (7)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned} \gcd(t^2, t^2 - u^2) &= \gcd(t^2, u^2) = 1 \\ \gcd(4t^2 - u^2, u^2 - t^2) &= \gcd(3t^2 + (t^2 - u^2), u^2 - t^2) \\ &= \gcd(3t^2, t^2 - u^2) \\ &= \gcd(3, t^2 - u^2) \\ &= 1 \text{ または } 3 \end{aligned}$$

であるから，(7)より

$$(4t^2 - u^2, u^2 - t^2) = (k^2, \ell^2), (-k^2, -\ell^2), (3k^2, 3\ell^2), (-3k^2, -3\ell^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在する。 t, u は奇数であり，

$$4t^2 - u^2 \equiv 3 \pmod{8}, \quad k^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから，

$$4t^2 - u^2 = 3k^2 \quad (8)$$

$$u^2 - t^2 = 3\ell^2 \quad (9)$$

の場合に限られる。(8) + (9)より

$$3t^2 = 3k^2 + 3\ell^2$$

$$t^2 = k^2 + \ell^2$$

ピタゴラス方程式の定理^{注3}を適用すると

$$t = \alpha^2 + \beta^2, \quad k = \alpha^2 - \beta^2, \quad \ell = 2\alpha\beta \quad (10)$$

を満たす互いに素な自然数 α, β が存在する。(8) + (9) × 4より

$$3u^2 = 3k^2 + 3 \cdot 4\ell^2$$

$$u^2 = k^2 + 4\ell^2$$

(10)を代入すると

$$u^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4(2\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + 14\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \quad (11)$$

(6)より v は偶数であり，(2)も考えて

$$u^2 \leq u^2 \left(\frac{v}{2}\right)^2 = y^2 < (4xy)^2 < z^2$$

であるから，(11)が成り立つことは z の最小性に反する。

2° x, y がともに奇数であるとき

$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ より $x^2 - y^2$ は 4 で割り切れ，(2)より z も 4 で割り切れるから，(2)を

$$\left(\frac{x^2 - y^2}{4}\right)^2 + (xy)^2 = \left(\frac{z}{4}\right)^2$$

をみることができる。必要ならば x と y を入れかえ, ピタゴラス方程式の定理を適用すると

$$x^2 - y^2 = 4 \cdot 2mn \quad (12)$$

$$xy = (m+n)(m-n) \quad (13)$$

を満たす互いに素な偶奇の異なる自然数 m, n が存在する。

$\gcd(x, m+n) = s$ とおくと,

$$x = st, \quad m+n = su \quad (14)$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(13)より

$$ty = u(m-n)$$

t と u は互いに素であるから

$$y = uv, \quad m-n = tv \quad (15)$$

を満たす自然数 v が存在する。(14), (15)より

$$m = \frac{su+tv}{2}, \quad n = \frac{su-tv}{2} \quad (16)$$

(14), (15), (16)を(12)に代入して

$$s^2t^2 - u^2v^2 = 8 \cdot \frac{su+tv}{2} \cdot \frac{su-tv}{2}$$

$$s^2t^2 - u^2v^2 = 2s^2u^2 - 2t^2v^2$$

$$s^2(2u^2 - t^2) = v^2(2t^2 - u^2)$$

$2u^2 - t^2 \neq 0$, $2t^2 - u^2 \neq 0$ ^{注5}であり,

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{2t^2 - u^2}{2u^2 - t^2} = \frac{(2t^2 - u^2)(2u^2 - t^2)}{(2u^2 - t^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$(2t^2 - u^2)(2u^2 - t^2) = w^2$$

を満たす自然数 w が存在する。[3] 定理2より

$$t = u$$

(14), (15)より

$$x = m+n, \quad y = m-n$$

(12)に代入すると

$$4mn = (m+n)^2 - (m-n)^2 = 4 \cdot 2mn$$

したがって,

$$mn = 0$$

となって矛盾する。 ■

注1 [2]に紹介されてはいるが、原典を見つけることはできなかった。そのため、証明された年など、詳細は不明である。

注2 あとは、方程式

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2$$

の整数解さえ求めれば解決する。自然数解が $x = y$ に限られることは、古くから知られているようである。決して簡単に証明できるわけではないが、[2]など整数論(特にディオファントス方程式論)の書物に掲載されているので、証明はそちらを参照していただきたい。

注3 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき、

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが、必要ならば [1] pp.20-22 などを参照されるとよい。

注4 ここでは、 $x^2 - y^2 < 0$ の場合もあり得る。ピタゴラス方程式の定理を適用した結果が直接には $-x^2 + y^2 = m^2 - n^2$ である場合は、 m と n を入れかえればよい。

注5 $2t^2 = u^2$ であるとすれば、素因数分解における2の指数が左辺は奇数、右辺は偶数となって、素因数分解の一意性に反するから、 $2t^2 \neq u^2$ である。 $2u^2 \neq t^2$ についても同様である。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] T.Andreescu, D.Andrica, and I.Cucurezeanu
An Introduction to Diophantine Equations, Birkhäuser (2010)
- [3] 大塚美紀生, 等差数列をなす平方数について,
早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/arithmatic-square.pdf>
- [4] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7x2y2+y4=z2.pdf>