

# 方程式 $x^4 + 15x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

本稿では、方程式

$$x^4 + 15x^2y^2 + y^4 = z^2$$

の整数解を考える。2014 年以来  $x^4 + kx^2y^2 + y^4 = z^2$  タイプの方程式を調べてきたが、今回はこれまでと違って単独で解くのは難しい<sup>注1</sup> ようなので、方程式

$$17x^4 - 18x^2y^2 + 17y^4 = z^2$$

を巻き込んで 2 つまとめて解くことにする。

定理 1 方程式

$$x^4 + 15x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

定理 2 自然数  $x, y, z$  が方程式

$$17x^4 - 18x^2y^2 + 17y^4 = z^2$$

を満たすならば、 $x = y$  が成り立つ。

絡み合う構造

定理 1 の一部を補題 1 とし、定理 2 の一部を補題 2 として準備する。補題 1 を用いて補題 2 を証明し、補題 2 を用いて定理 1 全体を証明し、定理 1 を用いて定理 2 全体を証明する。どちらか一方をまず証明し、それを用いて他方を証明するというようにはいかないようである。<sup>注1</sup>

補題 1  $x, y, z$  がすべて正の奇数であるとき、方程式

$$x^4 + 15x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

は成り立たない。

(証明)  $\delta = \gcd(x, y)$  とすると、 $\delta^4 \mid z^2$  より

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta^2 z_1$$

を満たす自然数  $x_1, y_1, z_1$  が存在して

$$x_1^2 - 15x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つから、

$x$  と  $y$  は互いに素

であるとして、補題 1 を示せばよい。(1) を変形すると

$$(x^2 + y^2)^2 + 13x^2y^2 = z^2$$

$$\begin{aligned} 13x^2y^2 &= z^2 - (x^2 + y^2)^2 \\ &= (z + x^2 + y^2)(z - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2)$$

$z + x^2 + y^2$  と  $z - x^2 - y^2$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,  $p$  は奇素数であり,

$$\begin{aligned} p &| z + x^2 + y^2 \quad \text{かつ} \quad p | z - x^2 - y^2 \\ \implies p &| 2(x^2 + y^2) \quad \text{かつ} \quad p^2 | 13x^2y^2 \\ \implies p &| x^2 + y^2 \quad \text{かつ} \quad p | x^2y^2 \\ \implies p &| x \quad \text{かつ} \quad p | y \end{aligned}$$

となって矛盾するから,

$$z + x^2 + y^2 \text{ と } z - x^2 - y^2 \text{ は互いに素}$$

である。(2)より

$$(xy, z + x^2 + y^2, z - x^2 - y^2) = (ab, 13a^2, b^2) \text{ または } (ab, b^2, 13a^2)$$

を満たす互いに素な正の奇数  $a, b$  が存在して,

$$xy = ab \quad (3)$$

$$2(x^2 + y^2) = |13a^2 - b^2| \quad (4)$$

$\gcd(x, a) = s$  とおくと,

$$x = st, \quad a = su \quad (5)$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在して, (3)より

$$ty = ub$$

$t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$y = uv, \quad b = tv \quad (6)$$

を満たす自然数  $v$  が存在する。(5), (6)を(4)に代入すると

$$2s^2t^2 + 2u^2v^2 = |13s^2u^2 - t^2v^2| \quad (7)$$

1°  $13s^2u^2 - t^2v^2 > 0$  のとき, (7)は

$$2s^2t^2 + 2u^2v^2 = 13s^2u^2 - t^2v^2$$

$$(2u^2 + t^2)v^2 = (13u^2 - 2t^2)s^2$$

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{13u^2 - 2t^2}{2u^2 + t^2} = \frac{(13u^2 - 2t^2)(2u^2 + t^2)}{(2u^2 + t^2)^2}$$

と表されるから,

$$(13u^2 - 2t^2)(2u^2 + t^2) = w^2 \quad (8)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\gcd(u^2, 2u^2 + t^2) = \gcd(u^2, t^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(13u^2 - 2t^2, 2u^2 + t^2) &= \gcd(17u^2 - 2(2u^2 + t^2), 2u^2 + t^2) \\ &= \gcd(17u^2, 2u^2 + t^2) \\ &= \gcd(17, 2u^2 + t^2) \\ &= 1 \text{ または } 17 \end{aligned}$$

であるから, (8)より

$$(13u^2 - 2t^2, 2u^2 + t^2) = (k^2, \ell^2) \text{ または } (17k^2, 17\ell^2)$$

を満たす正の奇数  $k, \ell$  が存在する。ところが,  $t^2 \equiv u^2 \equiv 1 \pmod{4}$  より

$$13u^2 - 2t^2 \equiv 2u^2 + t^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

であるから,  $k^2 \equiv \ell^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $17 \equiv 1 \pmod{4}$  と矛盾する。

2°  $13s^2u^2 - t^2v^2 < 0$  のとき, (7) は

$$2s^2t^2 + 2u^2v^2 = t^2v^2 - 13s^2u^2$$

$$(2t^2 + 13u^2)s^2 = (t^2 - 2u^2)v^2$$

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{t^2 - 2u^2}{2t^2 + 13u^2} = \frac{(t^2 - 2u^2)(2t^2 + 13u^2)}{(2t^2 + 13u^2)^2}$$

と表されるから,

$$(t^2 - 2u^2)(2t^2 + 13u^2) = w^2 \tag{9}$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。  $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\gcd(t^2 - 2u^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 - 2u^2, 2t^2 + 13u^2) &= \gcd(t^2 - 2u^2, 2(t^2 - 2u^2) + 17u^2) \\ &= \gcd(t^2 - 2u^2, 17u^2) \\ &= \gcd(t^2 - 2u^2, 17) \\ &= 1 \text{ または } 17 \end{aligned}$$

であるから, (9) より

$$(t^2 - 2u^2, 2t^2 + 13u^2) = (k^2, \ell^2) \text{ または } (17k^2, 17\ell^2)$$

を満たす正の奇数  $k, \ell$  が存在する。ところが,  $t^2 \equiv u^2 \equiv 1 \pmod{4}$  より

$$t^2 - 2u^2 \equiv 2t^2 + 13t^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

であるから,  $k^2 \equiv \ell^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $17 \equiv 1 \pmod{4}$  と矛盾する。 ■

## 補題2 方程式

$$17x^4 - 18x^2y^2 + 17y^4 = z^2 \tag{10}$$

を満たす自然数  $x, y, z$  が存在するならば,  $x$  と  $y$  の偶奇は等しい。

(証明) 自然数  $x, y, z$  が (10) を満たすとき,  $x$  と  $y$  の偶奇が異なるとすれば矛盾することを示せばよい。対称性より

$$x > y$$

の場合だけ考えれば十分である。

$$a = x + y, \quad b = x - y$$

とおくと,  $a, b$  はともに正の奇数であり,

$$2x = a + b, \quad 2y = a - b$$

であるから, (10) より

$$17(2x)^4 - 18(2x)^2(2y)^2 + 17(2y)^4 = 16z^2$$

$$17(a + b)^4 - 18(a^2 - b^2)^2 + 17(a - b)^4 = 16z^2$$

$$16a^4 + 240a^2b^2 + 16b^4 = 16z^2$$

$$a^4 + 15a^2b^2 + b^4 = z^2$$

ところが,  $a, b$  はともに奇数であるから, 補題 1 に反する。 ■

定理 1 の証明

方程式

$$x^4 + 15x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (11)$$

を満たす自然数  $x, y, z$  があるとすれば, その中で

$z$  が最小

となる場合が存在するはずである。そのとき,  $\delta = \gcd(x, y)$  とすると,  $\delta^4 | z^2$  より

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta^2 z_1$$

を満たす自然数  $x_1, y_1, z_1$  が存在して

$$x_1^2 - 15x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つ。 $z$  の最小性より  $\delta = 1$  となるから,

$x$  と  $y$  は互いに素

である。

補題 1 より  $x$  と  $y$  の偶奇は異なり,  $x$  と  $y$  について対称であるから,

$x$  は奇数,  $y$  が偶数

としてよい。(11)を変形すると

$$(x^2 + y^2)^2 + 13x^2y^2 = z^2$$

$$13x^2y^2 = z^2 - (x^2 + y^2)^2$$

$$= (z + x^2 + y^2)(z - x^2 - y^2)$$

$$13x^2 \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z + x^2 + y^2}{2} \cdot \frac{z - x^2 - y^2}{2} \quad (12)$$

$\frac{z + x^2 + y^2}{2}$  と  $\frac{z - x^2 - y^2}{2}$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,

$$\implies p | x^2 + y^2 \text{ かつ } p^2 | 13x^2y^2$$

$$\implies p | x^2 + y^2 \text{ かつ } p | xy$$

$$\implies p | x \text{ かつ } p | y$$

となって矛盾するから,

$\frac{z + x^2 + y^2}{2}$  と  $\frac{z - x^2 - y^2}{2}$  は互いに素

である。(12)より

$$\left(\frac{xy}{2}, \frac{z + x^2 + y^2}{2}, \frac{z - x^2 - y^2}{2}\right) = (ab, 13a^2, b^2) \text{ または } (ab, b^2, 13a^2)$$

を満たす互いに素な自然数  $a, b$  が存在して,

$$xy = 2ab \quad (13)$$

$$x^2 + y^2 = |13a^2 - b^2| \quad (14)$$

が成り立つ。(14)より  $13a^2 - b^2$  は奇数であるから,

$a$  と  $b$  は偶奇が異なる。

I  $a$  が奇数,  $b$  が偶数のとき

$\gcd(x, a) = s$  とおくと

$$x = st, \quad a = su \quad (15)$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在する。(13)より

$$ty = 2ub$$

$t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$y = uv, \quad 2b = tv \quad (16)$$

を満たす正の偶数  $v$  が存在する。

$$x^2 \equiv 1, \quad y^2 \equiv 0, \quad 13a^2 \equiv 1, \quad b^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

より, (14)は

$$x^2 + y^2 = 13a^2 - b^2$$

であるから, (15), (16)を代入すると

$$s^2 t^2 + u^2 v^2 = 13s^2 u^2 - \frac{t^2 v^2}{4}$$

$$\frac{4u^2 + t^2}{4} v^2 = (13u^2 - t^2) s^2$$

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{4(13u^2 - t^2)}{4u^2 + t^2} = \frac{4(13u^2 - t^2)(4u^2 + t^2)}{(4u^2 + t^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$(13u^2 - t^2)(4u^2 + t^2) = w^2 \quad (17)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\gcd(u^2, 4u^2 + t^2) = \gcd(u^2, t^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(13u^2 - t^2, 4u^2 + t^2) &= \gcd(17u^2 - (4u^2 + t^2), 4u^2 + t^2) \\ &= \gcd(17u^2, 4u^2 + t^2) \\ &= \gcd(17, 4u^2 + t^2) \\ &= 1 \text{ または } 17 \end{aligned}$$

であるから, (17)より

$$(13u^2 - t^2, 4u^2 + t^2) = (k^2, \ell^2) \text{ または } (17k^2, 17\ell^2)$$

を満たす互いに素な自然数  $k, \ell$  が存在する。ところが,  $t, u, \ell$  は奇数であり,

$$4u^2 + t^2 \equiv 5 \pmod{8}, \quad \ell^2 \equiv 17\ell^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから矛盾する。

## II $a$ が偶数, $b$ が奇数のとき

$\gcd(x, b) = s$  とおくと

$$x = st, \quad b = su \quad (18)$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在する。(13)より

$$ty = 2au$$

$t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$y = uv, \quad 2a = tv \quad (19)$$

を満たす正の偶数  $v$  が存在する。

$$x^2 \equiv 1, \quad y^2 \equiv 0, \quad 13a^2 \equiv 0, \quad b^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

より, (14)は

$$x^2 + y^2 = b^2 - 13a^2$$

であるから, (18), (19)を代入すると

$$s^2 t^2 + u^2 v^2 = s^2 u^2 - \frac{13}{4} t^2 v^2$$

$$\frac{4u^2 + 13t^2}{4} v^2 = (u^2 - t^2) s^2$$

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{4(u^2 - t^2)}{4u^2 + 13t^2} = \frac{4(u^2 - t^2)(4u^2 + 13t^2)}{(4u^2 + 13t^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$(u^2 - t^2)(4u^2 + 13t^2) = w^2 \quad (20)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\gcd(u^2 - t^2, t^2) = \gcd(u^2, t^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(u^2 - t^2, 4u^2 + 13t^2) &= \gcd(u^2 - t^2, 4(u^2 - t^2) + 17t^2) \\ &= \gcd(u^2 - t^2, 17t^2) \\ &= \gcd(u^2 - t^2, 17) \\ &= 1 \text{ または } 17 \end{aligned}$$

であるから, (20)より

$$(u^2 - t^2, 4u^2 + 13t^2) = (k^2, \ell^2) \text{ または } (17k^2, 17\ell^2)$$

を満たす互いに素な自然数  $k, \ell$  ( $k$  は偶数,  $\ell$  は奇数) が存在する。

### IIA

$$u^2 - t^2 = k^2 \quad (21)$$

$$4u^2 + 13t^2 = \ell^2 \quad (22)$$

のとき,  $t$  と  $u$  が互いに素な正の奇数であることを考えて, (21)にピタゴラス方程式の定理<sup>注2</sup>を適用すると

$$u = m^2 + n^2, \quad t = m^2 - n^2, \quad k = 2mn$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数  $m, n$  が存在する。(22)に代入すると

$$4(m^2 + n^2)^2 + 13(m^2 - n^2)^2 = \ell^2$$

$$17m^4 - 18m^2 n^2 + 17n^4 = \ell^2$$

が成り立つが， $m$  と  $n$  は偶奇が異なるから補題 2 と矛盾する。

II B

$$u^2 - t^2 = 17k^2 \quad (23)$$

$$4u^2 + 13t^2 = 17\ell^2 \quad (24)$$

のとき，(24) - (23) × 4 より

$$\begin{aligned} 17t^2 &= 17\ell^2 - 4 \cdot 17k^2 \\ t^2 &= \ell^2 - 4k^2 \end{aligned} \quad (25)$$

$2k$  と奇数  $\ell$  が互いに素であることを考えて，(25) にピタゴラス方程式の定理<sup>注2</sup>を適用すると

$$t = m^2 - n^2, \quad 2k = 2mn, \quad \ell = m^2 + n^2$$

を満たす自然数  $m, n$  が存在する。(23) に代入すると

$$\begin{aligned} u^2 &= (m^2 - n^2)^2 + 17m^2n^2 \\ &= m^4 + 15m^2n^2 + n^4 \end{aligned} \quad (26)$$

(18), (13), (11) より

$$u^2 \leq s^2u^2 = b^2 < 4a^2b^2 = x^2y^2 < z^2$$

であるから，(26) の成立は  $z$  の最小性に反する。 ■

定理 2 の証明

自然数  $x, y, z$  が

$$17x^4 - 18x^2y^2 + 17y^4 = z^2 \quad (27)$$

を満たすとすれば，補題 2 より  $x$  と  $y$  の偶奇は等しいから，

$$x + y \text{ と } x - y \text{ はともに偶数}$$

である。

$x \neq y$  であるとすれば，対称性より

$$x > y$$

としてよく，

$$2a = x + y, \quad 2b = x - y$$

を満たす自然数  $a, b$  が存在する。これは

$$x = a + b, \quad y = a - b$$

と書き換えられるから，(27) に代入すると

$$17(a + b)^2 - 18(a^2 - b^2)^2 + 17(a - b)^4 = z^2$$

$$16a^4 + 240a^2b^2 + 16b^4 = z^2$$

$$16(a^4 + 15a^2b^2 + b^4) = z^2$$

$z^2$  は 16 で割り切れるから  $z$  は 4 で割り切れ，

$$z = 4c \quad (c \text{ は自然数})$$

とおくことができ

$$a^4 + 15a^2b^2 + b^4 = c^2$$

が成り立つが、これは定理 1 に反する。

したがって、自然数  $x, y, z$  が (27) を満たすならば、 $x = y$  である。 ■

注 1 筆者が気づいていないような上手い解き方が存在する可能性はある。

注 2 互いに素な自然数  $x, y, z$  がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき、

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数  $m, n$  が存在する。

証明は読者に委ねるが、必要ならば [1] pp.20 - 22 などを参照されるとよい。

## 参考文献

- [ 1 ] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [ 2 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 11x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2020),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+11x2y2+y4=z2.pdf>
- [ 3 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2021),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+14x2y2+y4=z2.pdf>
- [ 4 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 30x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2021),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+30x2y2+y4=z2.pdf>