

方程式 $x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

本稿では、不定方程式 $x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解を求めることにする。方程式 $x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2$ (\rightarrow [4]) と同様、無数の原始解が存在するが、漸化式は少し複雑になりそうである。本定理の証明には [3] の結果が大いに役立っている。発表当時、[3] の内容は単なる興味本位でしかなかったが、今回の解決に貢献したという形で [3] の冒頭の予言が的中したことになる。

定理 不定方程式

$$x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

の整数解は無数にあり、正の原始解^{注1} $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$ は x と y の偶奇が異なり、 x が奇数^{注2} であるものは、次の漸化式で定まるもので尽くされる。

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & y_1 &= 2, & z_1 &= 9, \\ x_2 &= 5, & y_2 &= 12, & z_2 &= 281, \\ \begin{cases} x_{n+1} &= |x_n^4 - y_n^4| \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n z_n \\ z_{n+1} &= z_n^4 - 252x_n^4 y_n^4 \end{cases} & & (n = 2, 3, 4, \dots)^{\text{注3}} \end{aligned}$$

系 不定方程式 $x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2$ の自然数解のうち z が 3 で割り切れるものは $(x, y, z) = (d, 2d, 9d)$ または $(2d, d, 9d)$ (d は自然数) に限られる。

定理の証明

互いに素な自然数 x, y, z ^{注4} が (1) を満たすとする。このとき、

$$x \text{ と } y \text{ は互いに素}^{\text{注4}}$$

である。ここで、 x と y がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1, z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ となって (1) が成り立たないから、 x と y の偶奇は異なる。対称性も考えて

$$x \text{ は奇数, } y \text{ は偶数, } z \text{ は奇数}$$

として正の原始解を求めれば十分である。

(1) を変形して

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 + 14x^2y^2 &= z^2 \\ z^2 - (x^2 + y^2)^2 &= 14x^2y^2 \\ \frac{z + x^2 + y^2}{2} \cdot \frac{z - x^2 - y^2}{2} &= 14x^2 \left(\frac{y}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{z+x^2+y^2}{2} \text{ と } \frac{z-x^2-y^2}{2} \text{ が共通の素因数 } p \text{ をもつとすれば,}$$

$$p|x^2+y^2 \text{ かつ } p^2|14x^2y^2 \implies p|x^2+y^2 \text{ かつ } p|x^2y^2$$

$$\implies p|x \text{ かつ } p|y$$

となって x と y が互いに素であることに反するから,

$$\frac{z+x^2+y^2}{2} \text{ と } \frac{z-x^2-y^2}{2} \text{ は互いに素}$$

である。よって, (2) より

$$\left(\frac{z+x^2+y^2}{2}, \frac{z-x^2-y^2}{2}, \frac{xy}{2} \right) = (k^2, 14\ell^2, k\ell),$$

$$(14\ell^2, k^2, k\ell),$$

$$(7k^2, 2\ell^2, k\ell),$$

$$(2\ell^2, 7k^2, k\ell)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 k, ℓ (k は奇数) が存在し,

$$xy = 2k\ell \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 = |k^2 - 14\ell^2| \text{ または } |7k^2 - 2\ell^2| \tag{4}$$

$\gcd(x, k) = s$ とおくと, s は正の奇数であり,

$$x = st, \quad k = su \tag{5}$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(3) より

$$ty = 2ul$$

t と $2u$ は互いに素であるから

$$y = 2uv, \quad \ell = tv \tag{6}$$

を満たす自然数 v が存在する。(4) については

$$\ell \text{ が偶数のとき } k^2 - 14\ell^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 7k^2 - 2\ell^2 \equiv 7 \pmod{8}$$

$$\ell \text{ が奇数のとき } k^2 - 14\ell^2 \equiv 3 \pmod{8}, \quad 7k^2 - 2\ell^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

であり, 偶数 y が 4 で割れるか割れないかにより状況が変わる。

I y が 4 で割れない偶数であるとき

$$x^2 + y^2 \equiv 5 \pmod{8} \text{ であるから, (4) は}$$

$$x^2 + y^2 = 14\ell^2 - k^2 \text{ または } 7k^2 - 2\ell^2$$

であり,

$$k, \ell \text{ はともに奇数}$$

である。

IA

$$x^2 + y^2 = 14\ell^2 - k^2 \tag{7}$$

のとき, (5), (6) を (7) に代入すると

$$s^2t^2 + 4u^2v^2 = 14t^2v^2 - s^2u^2$$

$$(t^2 + u^2)s^2 = 2(7t^2 - 2u^2)v^2$$

$$\left(\frac{s}{v}\right)^2 = \frac{2(7t^2 - 2u^2)}{t^2 + u^2} = \frac{2(t^2 + u^2)(7t^2 - 2u^2)}{(t^2 + u^2)^2}$$

よって, $7t^2 - 2u^2 > 0$ であり,

$$2(t^2 + u^2)(7t^2 - 2u^2) = w^2 \quad (8)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(t^2 + u^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

であり, $7t^2 - 2u^2$ が奇数であることを考え,

$$\begin{aligned} \gcd(2(t^2 + u^2), 7t^2 - 2u^2) &= \gcd(t^2 + u^2, 7t^2 - 2u^2) \\ &= \gcd(t^2 + u^2, 7(t^2 + u^2) - 9u^2) \\ &= \gcd(t^2 + u^2, 9u^2) \\ &= \gcd(t^2 + u^2, 9) \\ &= 1 \text{ または } 3 \text{ または } 9 \end{aligned}$$

であるから, (8) より

$$(2(t^2 + u^2), 7t^2 - 2u^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。ところが, t, u は奇数であることより

$$7t^2 - 2u^2 \equiv 7 - 2 \equiv 5 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから矛盾する。

IB

$$x^2 + y^2 = 7k^2 - 2\ell^2 \quad (9)$$

のとき, (5), (6) を (9) に代入すると

$$s^2 t^2 + 4u^2 v^2 = 7s^2 u^2 - 2t^2 v^2$$

$$2(2u^2 + t^2)v^2 = (7u^2 - t^2)s^2$$

$$\left(\frac{v}{s}\right)^2 = \frac{7u^2 - t^2}{2(2u^2 + t^2)} = \frac{2(2u^2 + t^2)(7u^2 - t^2)}{4(2u^2 + t^2)^2} \quad (10)$$

よって, $7u^2 - t^2 > 0$ であり,

$$2(2u^2 + t^2)(7u^2 - t^2) = w^2 \quad (11)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(2u^2 + t^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

であり, $2u^2 + t^2$ が奇数であることを考え,

$$\begin{aligned} \gcd(2u^2 + t^2, 2(7u^2 - t^2)) &= \gcd(2u^2 + t^2, 7u^2 - t^2) \\ &= \gcd(2u^2 + t^2, 9u^2 - (2u^2 + t^2)) \\ &= \gcd(2u^2 + t^2, 9u^2) \\ &= \gcd(2u^2 + t^2, 9) \\ &= 1 \text{ または } 3 \text{ または } 9 \end{aligned}$$

であるから, (11) より

$$(2u^2 + t^2, 2(7u^2 - t^2)) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。

$$2u^2 + t^2 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \pmod{8}$$

であるから,

$$2u^2 + t^2 = 3g^2 \tag{12}$$

$$2(7u^2 - t^2) = 3h^2 \tag{13}$$

の場合に定まる。 h は偶数であるから

$$h = 2c$$

とおくと, (13)は

$$7u^2 - t^2 = 6c^2 \tag{14}$$

(12) + (14) より

$$9u^2 = 3g^2 + 6c^2$$

$$3u^2 - g^2 = 2c^2 \tag{15}$$

(12)かつ(15)に [3] 定理1を適用すると

$$t = u = g = c$$

t と u は互いに素であるから

$$t = u = 1$$

(10)より $\left(\frac{v}{s}\right)^2 = \frac{7-1}{2 \times (2+1)} = 1$ であるから
$$v = s$$

(5), (6) より

$$x = st = s, \quad y = 2su = 2s$$

x と y は互いに素であるから

$$x = 1, \quad y = 2$$

(1)より

$$z = 9$$

II y が 4 の倍数であるとき

$x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから, (4)は

$$x^2 + y^2 = k^2 - 14\ell^2 \text{ または } 2\ell^2 - 7k^2$$

であり,

k は奇数, ℓ は偶数

である。

IIA

$$x^2 + y^2 = k^2 - 14\ell^2 \tag{16}$$

のとき, (5), (6)を(16)に代入すると

$$s^2 t^2 + 4u^2 v^2 = s^2 u^2 - 14t^2 v^2$$

$$2(2u^2 + 7t^2)v^2 = (u^2 - t^2)s^2$$

$$\left(\frac{v}{s}\right)^2 = \frac{u^2 - t^2}{2(2u^2 + 7t^2)} = \frac{2(2u^2 + 7t^2)(u^2 - t^2)}{4(2u^2 + 7t^2)^2} \quad (17)$$

よって, $u^2 - t^2 > 0$ であり,

$$2(2u^2 + 7t^2)(u^2 - t^2) = w^2 \quad (18)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(u^2 - t^2, t^2) = \gcd(u^2, t^2) = 1$$

であり, $2u^2 + 7t^2$ が奇数であることを考え,

$$\begin{aligned} \gcd(2(u^2 - t^2), 2u^2 + 7t^2) &= \gcd(u^2 - t^2, 2u^2 + 7t^2) \\ &= \gcd(u^2 - t^2, 2(u^2 - t^2) + 9t^2) \\ &= \gcd(u^2 - t^2, 9t^2) \\ &= \gcd(u^2 - t^2, 9) \\ &= 1 \text{ または } 3 \text{ または } 9 \end{aligned}$$

であるから, (18) より

$$(2(u^2 - t^2), 2u^2 + 7t^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。 t, u は奇数であり,

$$2u^2 + 7t^2 \equiv 2 + 7 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから,

$$2u^2 + 7t^2 \neq 3h^2$$

IIAa

$$2(u^2 - t^2) = g^2 \quad (19)$$

$$2u^2 + 7t^2 = h^2 \quad (20)$$

(20) - (19) より

$$9t^2 = h^2 - g^2$$

$$g^2 + (3t)^2 = h^2 \quad (21)$$

g と h は互いに素であるから, g と $3t$ は互いに素であり, $3t$ が奇数であることも考えて, (21) にピタゴラス方程式の定理^{注5}を適用すると

$$g = 2mn, \quad 3t = m^2 - n^2, \quad h = m^2 + n^2 \quad (22)$$

を満たす互いに素で偶奇が異なる自然数 m, n が存在する。(19)に代入すると

$$u^2 - t^2 = 2m^2n^2$$

$$9u^2 = (3t)^2 + 18m^2n^2 = (m^2 - n^2)^2 + 18m^2n^2$$

$$m^4 + 16m^2n^2 + n^4 = (3u)^2 \quad (23)$$

(23)を満たす正の奇数 m , 正の偶数 n から始めて逆に辿ると,

$$g = 2mn, \quad h = m^2 + n^2, \quad 3t = |m^2 - n^2| \text{注6}$$

(17), (19), (20) より

$$\left(\frac{v}{s}\right)^2 = \frac{g^2}{4h^2} \text{ したがって } \frac{v}{s} = \frac{g}{2h}$$

(5), (6) より, $x = st$ と $y = 2uv$ は互いに素であるから, s と v は互いに素であり,

$\frac{1}{2}g = mn$ と $h = m^2 + n^2$ は互いに素であるから

$$v = \frac{1}{2}g = mn, \quad s = h = m^2 + n^2$$

(5), (6) より

$$x = st = (m^2 + n^2) \frac{|m^2 - n^2|}{3} = \frac{|m^4 - n^4|}{3} \quad (24)$$

$$y = 2uv = 2umn = \frac{2}{3}(3u)mn \quad (25)$$

(1), (24), (25), (23) より

$$\begin{aligned} 81z^2 &= (3x)^4 + 16(3x)^2(3y)^2 + (3y)^4 \\ &= (m^4 - n^4)^4 + 16(m^4 - n^4)^2 \cdot 4(3u)^2 m^2 n^2 + 16(3u)^4 m^4 n^4 \\ &= \{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4 n^4\}^2 \\ &\quad + 64m^2 n^2 \{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4 n^4\} (m^4 + 16m^2 n^2 + n^4) \\ &\quad + 16m^4 n^4 (m^4 + 16m^2 n^2 + n^4)^2 \end{aligned}$$

$m^4 + n^4 = \alpha$, $m^2 n^2 = \beta$ とおくと

$$\begin{aligned} 81z^2 &= (\alpha^2 - 4\beta^2)^2 + 64\beta(\alpha^2 - 4\beta^2)(\alpha + 16\beta) + 16\beta^2(\alpha + 16\beta)^2 \\ &= \alpha^4 - 8\alpha^2\beta^2 + 16\beta^4 \\ &\quad + 64(\alpha^3\beta + 16\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 - 64\beta^4) \\ &\quad + 16(\alpha^2\beta^2 + 32\alpha\beta^3 + 256\beta^4) \\ &= \alpha^4 + 64\alpha^3\beta + (8 + 32^2)\alpha^2\beta^2 + 256\alpha\beta^3 + 16\beta^4 \\ &= \alpha^4 + 8\alpha^2\beta^2 + 16\beta^4 + 64\alpha\beta(\alpha^2 + 4\beta^2) + (32\alpha\beta)^2 \\ &= (\alpha^2 + 32\alpha\beta + 4\beta^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9z &= \alpha^2 + 32\alpha\beta + 4\beta^2 \\ &= (m^4 + n^4)^2 + 32m^2 n^2 (m^4 + n^4) + 4m^4 n^4 \\ &= (m^4 + n^4)^2 + 32m^2 n^2 (m^4 + n^4) + 16^2 m^4 n^4 - 252m^4 n^4 \\ &= (m^4 + 16m^2 n^2 + n^4)^2 - 252m^4 n^4 \\ &= (3u)^4 - 252m^4 n^4 \end{aligned}$$

$$z = 9u^4 - 28m^4 n^4 = \frac{1}{9}(3u)^4 - 28m^4 n^4 \quad (26)$$

(23), (24), (25), (26) より

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}|x_n^4 - y_n^4|$$

$$y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n y_n z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{9}z_n^4 - 28x_n^4 y_n^4$$

特に $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 9$, $3|z_1$ であるから

$$x_2 = \frac{1}{3}|1^4 - 2^4| = 5, \quad y_2 = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 9 = 12, \quad z_2 = \frac{1}{9} \cdot 9^4 - 28 \cdot 1^4 \cdot 2^4 = 281$$

である。

IIAb

$$2(u^2 - t^2) = 9g^2 \quad (27)$$

$$2u^2 + 7t^2 = 9h^2 \quad (28)$$

(28) - (27) より

$$\begin{aligned} 9t^2 &= 9h^2 - 9g^2 \\ g^2 + t^2 &= h^2 \end{aligned} \quad (29)$$

g と h は互いに素であるから, g と t は互いに素であり, t が奇数であることも考えて, (29) にピタゴラス方程式の定理^{注5}を適用すると

$$g = 2mn, \quad t = m^2 - n^2, \quad h = m^2 + n^2 \quad (30)$$

を満たす互いに素で偶奇が異なる自然数 m, n が存在する。(27) に代入すると

$$\begin{aligned} u^2 - t^2 &= 18m^2n^2 \\ u^2 &= (m^2 - n^2)^2 + 18m^2n^2 = m^4 + 16m^2n^2 + n^4 \end{aligned} \quad (31)$$

(31) を満たす正の奇数 m , 正の偶数 n から始めて逆に辿ると,

$$g = 2mn, \quad h = m^2 + n^2, \quad t = |m^2 - n^2|^{注7}$$

(17), (27), (28) より

$$\left(\frac{v}{s}\right)^2 = \frac{9g^2}{4 \cdot 9h^2} = \frac{g^2}{4h^2} \quad \text{したがって} \quad \frac{v}{s} = \frac{g}{2h}$$

(5), (6) より, $x = st$ と $y = 2uv$ は互いに素であるから, s と v は互いに素であり, $\frac{1}{2}g = mn$ と $h = m^2 + n^2$ は互いに素であるから

$$v = \frac{1}{2}g = mn, \quad s = h = m^2 + n^2$$

(5), (6) より

$$x = st = (m^2 + n^2)|m^2 - n^2| = |m^4 - n^4| \quad (32)$$

$$y = 2uv = 2umn \quad (33)$$

ここで, $3|u$ とすれば, (31) より $3|m^2 - n^2|$, (32) より $3|x$ であり, (33) より $3|y$ であるから, x と y が互いに素であることに反する。よって,

u は 3 で割り切れない。

(26) を導く計算と同様にして, (1), (32), (33), (31) より

$$\begin{aligned} z^2 &= x^4 + 16x^2y^2 + y^4 \\ &= (m^4 - n^4)^4 + 16(m^4 - n^4)^2 \cdot 4u^2m^2n^2 + 16u^4m^4n^4 \\ &= \{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4n^4\}^2 \\ &\quad + 64m^2n^2\{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4n^4\}(m^4 + 16m^2n^2 + n^4) \\ &\quad + 16m^4n^4(m^4 + 16m^2n^2 + n^4)^2 \end{aligned}$$

$m^4 + n^4 = \alpha$, $m^2n^2 = \beta$ とおくと

$$\begin{aligned} z^2 &= (\alpha^2 - 4\beta^2)^2 + 64\beta(\alpha^2 - 4\beta^2)(\alpha + 16\beta) + 16\beta^2(\alpha + 16\beta)^2 \\ &= (\alpha^2 + 32\alpha\beta + 4\beta^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \alpha^2 + 32\alpha\beta + 4\beta^2 \\ &= (m^4 + n^4)^2 + 32m^2n^2(m^4 + n^4) + 4m^4n^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (m^4 + 16m^2n^2 + n^4)^2 - 252m^4n^4 \\
&= u^4 - 252m^4n^4
\end{aligned} \tag{34}$$

(31), (32), (33), (34) より

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= |x_n^4 - y_n^4| \\
y_{n+1} &= 2x_n y_n z_n \\
z_{n+1} &= z_n^4 - 252x_n^4 y_n^4
\end{aligned}$$

z_n は 3 で割り切れず, $252 = 3 \times 84$ であるから, z_{n+1} も 3 で割り切れない。

IIAa で求めたように, $z_2 = 281$ は 3 で割り切れないから, 数学的帰納法により

$n \geq 2$ においてつねに z_n は 3 で割り切れない。

(6), (1) より

$$u^2 \leq u^4 < (2uv)^4 = y^4 < x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2$$

であるから, $z_n < z_{n+1}$ である。

II B

$$x^2 + y^2 = 2\ell^2 - 7k^2 \tag{35}$$

のとき, (5), (6) を (35) に代入すると

$$\begin{aligned}
s^2 t^2 + 4u^2 v^2 &= 2t^2 v^2 - 7s^2 u^2 \\
(t^2 + 7u^2)s^2 &= (2t^2 - 4u^2)v^2 \\
\left(\frac{s}{v}\right)^2 &= \frac{2t^2 - 4u^2}{t^2 + 7u^2} = \frac{2(t^2 - 2u^2)(t^2 + 7u^2)}{(t^2 + 7u^2)^2}
\end{aligned}$$

よって, $t^2 - 2u^2 > 0$ であり,

$$2(t^2 - 2u^2)(t^2 + 7u^2) = w^2 \tag{36}$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(t^2 - 2u^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$t^2 - 2u^2$ が奇数であることを考え,

$$\begin{aligned}
\gcd(t^2 - 2u^2, 2(t^2 + 7u^2)) &= \gcd(t^2 - 2u^2, t^2 + 7u^2) \\
&= \gcd(t^2 - 2u^2, t^2 - 2u^2 + 9u^2) \\
&= \gcd(t^2 - 2u^2, 9u^2) \\
&= \gcd(t^2 - 2u^2, 9) \\
&= 1 \text{ または } 3 \text{ または } 9
\end{aligned}$$

であるから, (36) より

$$(t^2 - 2u^2, 2(t^2 + 7u^2)) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たす自然数 g, h が存在する。ところが, t, u は奇数であるから

$$t^2 - 2u^2 \equiv 1 - 2 \equiv 7 \pmod{8}$$

となつて, いずれの場合も成り立たず矛盾する。

以上により, 起こり得るすべての場合が調べ尽くされたので, 定理は証明された。 ■

注1 自然数解 (x_0, y_0, z_0) が一つ見つかり、任意の整数 d に対して (x_0d, y_0d, z_0d^2) も整数解となるから、単に無数にあるというだけでは意味がない。原始解 (x, y, z) が互いに素である整数解が無数個ということになれば、本質的な意味で無数個ということになる。

注2 x が偶数、 y が奇数である場合も存在するが、 x と y について対称なので、 x が奇数、 y が偶数である場合を求めるだけで一般に求めたことになる。

注3 漸化式自体は

z_n が 3 で割り切れるとき

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{|x_n^4 - y_n^4|}{3} \\ y_{n+1} = \frac{2}{3} x_n y_n z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{9} z_n^4 - 28 x_n^4 y_n^4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

z_n が 3 で割り切れないとき

$$\begin{cases} x_{n+1} = |x_n^4 - y_n^4| \\ y_{n+1} = 2 x_n y_n z_n \\ z_{n+1} = z_n^4 - 252 x_n^4 y_n^4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となるが、定理の証明において IIAa より

$$z_2 = 281 \not\equiv 0 \pmod{3},$$

IIAb より

$$3 \nmid z_n \text{ ならば } 3 \nmid z_{n+1}$$

であるから、 $n \geq 2$ でつねに z_n は 3 で割り切れない。

注4 3数が互いに素であることとそのうちの2数が互いに素であることは意味が異なる。例えば、3数 6, 10, 15 は互いに素であるが、そのうちのどの2数も互いに素ではない。(1)が成り立つ前提では、 x と y が共通の素因数 p をもつとすれば、 $p^4 | z^2$ より z も p で割り切れてしまうので、 x と y は互いに素であることがわかる。

注5 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき、

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが、必要ならば [1] pp.20-22 などを参照されるとよい。

注6 (22)において $3t = m^2 - n^2$ は t に応じて m, n が決まるが, (23)において先に m, n を定めると, $m^2 - n^2 > 0$ の場合と $n^2 - m^2 > 0$ の場合が起こり得る。また, (23)により m, n を先に定めたとき, (23)は

$$(m^2 - n^2)^2 + 18m^2n^2 = 9u^2$$

とも書けるので, $m^2 - n^2$ は 3 で割り切れる。

注7 (30)において $t = m^2 - n^2$ は t に応じて m, n が決まるが, (31)において先に m, n を定めると, $m^2 - n^2 > 0$ の場合と $n^2 - m^2 > 0$ の場合が起こり得る。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ の自然数解について, 早稲田数学フォーラム (2019), <http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $(3x^2 - y^2)(3y^2 - 2x^2) = 2z^2$ の整数解, 早稲田数学フォーラム (2021), [http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-y2\)\(3y2-2x2\)=2z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-y2)(3y2-2x2)=2z2.pdf)
- [4] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解, 早稲田数学フォーラム (2022), <http://wasmath.la.coocan.jp/x4+12x2y2+y4=z2.pdf>

2023.1.23