

方程式 $x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

不定方程式 $x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解の構造は意外に複雑であり，そのすべてをコンパクトにまとめる手立てが今のところはないので，本稿では次の定理の形で一部を述べるにとどめたいと思う。

定理 自然数から成る数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を，漸化式

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad y_1 = 4, \quad z_1 = 23, \\ x_{n+1} &= |x_n^4 - y_n^4|, \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n z_n, \\ z_{n+1} &= (x_n^2 + y_n^2)^4 + 30x_n^2 y_n^2 (x_n^4 + y_n^4) \end{aligned}$$

により定めるとき， $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$ は方程式

$$x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

の解である。特に，ディオファントス方程式 (1) の原始解は無数に存在する。^{注1}

方程式 $x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解は定理で与えたもの以外にも無数にあり，定理の証明のあとで補足として少し触れたいと思う。定理で取り上げた整数解は，漸化式が簡潔に表現できるものを選んでいる。

定理の証明

自然数 x, y, z が

$$x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たすとき，

$$X = |x^4 - y^4|, \quad Y = 2xyz$$

とおくと，

$$\begin{aligned} X^4 + 17X^2Y^2 + Y^4 &= (x^4 - y^4)^4 + 17(x^4 - y^4)^2 \cdot 4x^2y^2z^2 + 16x^4y^4z^4 \\ &= \{(x^4 + y^4)^2 - 4x^4y^4\}^2 \\ &\quad + 68x^2y^2\{(x^4 + y^4)^2 - 4x^4y^4\}(x^4 + 17x^2y^2 + y^4) \\ &\quad + 16x^4y^4(x^4 + 17x^2y^2 + y^4)^2 \end{aligned}$$

ここで， $x^4 + y^4 = \alpha$, $x^2y^2 = \beta$ とおくと

$$\begin{aligned} &= (\alpha^2 - 4\beta^2)^2 + 68\beta(\alpha^2 - 4\beta^2)(\alpha + 17\beta) + 16\beta^2(\alpha + 17\beta)^2 \\ &= \alpha^4 - 8\alpha^2\beta^2 + 16\beta^4 + 68(\alpha^3\beta + 17\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 - 68\beta^4) \\ &\quad + 16\beta^2(\alpha^2 + 34\alpha\beta + 289\beta^2) \\ &= \alpha^4 + 68\alpha^3\beta + (4 \cdot 17^2 + 8)\alpha^2\beta^2 + 16 \cdot 17\alpha\beta^3 + 16\beta^4 \\ &= \alpha^4 + 8\alpha^2\beta^2 + 16\beta^4 + 68(\alpha^3\beta + 17\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha^2 + 4\beta^2)^2 + 68\alpha\beta(\alpha^2 + 4\beta^2) + 34^2\alpha^2\beta^2 \\
&= (\alpha^2 + 34\alpha\beta + 4\beta^2)^2
\end{aligned}$$

$Z = \alpha^2 + 34\alpha\beta + 4\beta^2$ とおくと

$$X^4 + 17X^2Y^2 + Y^4 = Z^2$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned}
Z &= \alpha^2 + 34\alpha\beta + 4\beta^2 \\
&= (x^4 + y^4)^2 + 34x^2y^2(x^4 + y^4) + 4x^4y^4 \\
&= x^8 + 34x^6y^2 + 6x^4y^4 + 34x^2y^6 + y^8 \\
&= (x^2 + y^2)^4 + 30x^2y^2(x^4 + y^4)
\end{aligned}$$

であり、定理が主張する漸化式が成り立つ。

$$y_{n+1} = 2x_n y_n z_n \text{ より } y_{n+1} > y_n \text{ であり、}$$

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < \dots$$

が成り立つから、任意の自然数 n に対して

x_n と y_n が互いに素

であることが示されれば、ディオファントス方程式 (1) の原始解が無数にあることが示されたことになる。

$x_1 = 1$ と $y_1 = 4$ は互いに素である。

x_n と y_n が互いの素であるとして、 x_{n+1} と y_{n+1} が共通の素因数 p をもつとする。

x_n は奇数、 y_n は偶数^{注2} であるから、 $p \mid x_{n+1}$ より

p は奇素数

であり、 $p \mid 2x_n y_n z_n$ より

$$p \mid x_n \text{ または } p \mid y_n \text{ または } p \mid z_n$$

である。ここで、 $p \mid x_n$ であるとすれば、 $p \mid x_{n+1} = |x_n^4 - y_n^4|$ より $p \mid y_n^4$ であり、 p は素数であるから $p \mid y_n$ となって、 x_n と y_n が互いに素であることに反するから、

$$p \nmid x_n$$

同様に、

$$p \nmid y_n$$

もいえるから、

$$p \mid z_n \text{ したがって } p \mid z_n^2 = x_n^4 + 17x_n^2 y_n^2 + y_n^4$$

ということになる。

$$x_n^4 + 17x_n^2 y_n^2 + y_n^4 = (x_n^4 - y_n^4) + y_n^2(17x_n^2 + 2y_n^2)$$

であるから、 $p \mid x_{n+1} = |x_n^4 - y_n^4|$ より

$$p \mid y_n^2(17x_n^2 + 2y_n^2)$$

$p \nmid y_n$ であるから

$$p \mid 17x_n^2 + 2y_n^2$$

である。

$$x_n^4 - y_n^4 = (x_n^2 + y_n^2)(x_n^2 - y_n^2)$$

$$17x_n^2 - y_n^2 = 15x_n^2 + 2(x_n^2 + y_n^2) = 19x_n^2 - 2(x_n^2 - y_n^2)$$

より

$$\begin{aligned} p \mid 15x_n^2 \text{ または } p \mid 19x_n^2 &\implies p \mid 15 \text{ または } p \mid 19 \\ &\implies p = 3 \text{ または } p = 5 \text{ または } p = 19 \end{aligned}$$

(i) $p = 3$ のとき

$3 \nmid x_n, 3 \nmid y_n$ より

$$\begin{aligned} x_n^2 &\equiv y_n^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ z_n^2 &= x_n^4 + 17x_n^2y_n^2 + y_n^4 \equiv 19 \not\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

となって $3 \mid z_n$ に反する。

(ii) $p = 5$ のとき

$5 \nmid x_n, 3 \nmid y_n$ より, x_n^2, y_n^2 を 5 で割った余りは 1 または 4 であり,
 $5 \mid x_n^4 - y_n^4, 1^2 - 4^2 \not\equiv 0 \pmod{5}$

より

$$x_n^2 \equiv y_n^2 \equiv 1 \text{ または } 4 \pmod{5}$$

となるが,

$$\begin{aligned} 1^2 + 17 \times 1 \times 1 + 1^2 &\equiv 19 \not\equiv 0 \pmod{5} \\ 4^2 + 17 \times 4 \times 4 + 4^2 &\equiv 36 \not\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

より $5 \mid z_n^2$ と矛盾する。

(iii) $p = 19$ のとき

$19 \nmid x_n, 19 \nmid y_n$ より, x_n^2, y_n^2 を 19 で割った余りは

$$1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5$$

のいずれかであり, $x_n^2 + y_n^2 \not\equiv 0 \pmod{19}$ であるから, $19 \mid x_n^4 - y_n^4$ より

$$x_n^2 \equiv y_n^2 \pmod{19}$$

$y_n^2 = x_n^2 + 19q_n$ (q_n は整数) とおくと

$$\begin{aligned} x_n^4 + 17x_n^2y_n^2 + y_n^4 &= x_n^4 + 17x_n^2(x_n^2 + 19q_n) + (x_n^2 + 19q_n)^2 \\ &= 19x_n^4 + 19^2x_n^2q_n + 19^2q_n^2 \\ &\equiv 19x_n^4 \not\equiv 0 \pmod{19^2} \end{aligned}$$

となって $19^2 \mid z_n^2$ であることに反する。

よって, x_n と y_n が互いの素ならば x_{n+1} と y_{n+1} が互いに素であることが導かれたので, 数学的帰納法により, すべての自然数に対して

$$x_n \text{ と } y_n \text{ は互いの素}$$

であることが示され, 方程式 (1) の整数解は無数に存在する。 ■

漸化式が導かれた背景

互いに素な自然数 x, y, z が

$$x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たすとする。 x と y が共通の素因数 p をもつとすれば, $p \mid z$ となって互いに素であることに反するから,

x と y は互いに素

である。ここで、 x と y がともに奇数であるとすれば、

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad x^4 + 17x^2y^2 + y^4 \equiv 3 \not\equiv z^2 \pmod{8}$$

となって、(1)が成り立つことと矛盾するから

$$x \not\equiv y \pmod{2}$$

対称性を考えて

x が奇数、 y が偶数、 z が奇数

である場合を求めれば十分である。

(1)を変形すると

$$(x^2 - y^2)^2 + 19x^2y^2 = z^2$$

$$19x^2y^2 = z^2 - (x^2 - y^2)^2$$

$$19x^2 \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z + x^2 - y^2}{2} \cdot \frac{z - x^2 + y^2}{2} \tag{2}$$

$\frac{z + x^2 - y^2}{2}$ と $\frac{z - x^2 + y^2}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば、

$$\begin{aligned} p \mid x^2 - y^2 \text{ かつ } p^2 \mid 19x^2y^2 &\implies p \mid x^2 - y^2 \text{ かつ } p \mid x^2y^2 \\ &\implies p \mid x^2 \text{ かつ } p \mid y^2 \end{aligned}$$

となって、 x と y が互いに素であることに反するから、

$$\frac{z + x^2 - y^2}{2} \text{ と } \frac{z - x^2 + y^2}{2} \text{ は互いに素}$$

である。(2)より

$$\begin{aligned} \left(\frac{xy}{2}, \frac{z + x^2 - y^2}{2}, \frac{z - x^2 + y^2}{2}\right) &= (ab, 19a^2, b^2), \\ &= (ab, -19a^2, -b^2), \\ &= (ab, b^2, 19a^2), \\ &= (ab, -b^2, -19a^2) \end{aligned}$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数 a, b が存在して

$$xy = 2ab \tag{3}$$

$$x^2 - y^2 = \pm(19a^2 - b^2)$$

が成り立つ。 $x^2 \not\equiv y^2 \pmod{2}$ より

$$a \not\equiv b \pmod{2}$$

であるから、(a, b のどちらかが奇数の場合でも)

$$19a^2 - b^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

x は奇数、 y は偶数であるから、 $x^2 - y^2 = \pm(19a^2 - b^2)$ は

$$x^2 - y^2 = b^2 - 19a^2 \tag{4}$$

$\gcd(x, a) = s$ とおくと、 $s \mid x$ より s は奇数であり、

$$x = st, \quad a = su \tag{5}$$

を満たす互いに素な自然数 t, u (t は奇数) が存在する。(3)より

$$ty = 2ub$$

t と $2u$ は互いに素であるから

$$y = 2uv, \quad b = tv \tag{6}$$

を満たす自然数 v が存在する。(5), (6) を (4) に代入すると

$$\begin{aligned} s^2 t^2 - 4u^2 v^2 &= t^2 v^2 - 19s^2 u^2 \\ (t^2 + 19u^2)s^2 &= (t^2 + 4u^2)v^2 \\ \left(\frac{s}{v}\right)^2 &= \frac{t^2 + 4u^2}{t^2 + 19u^2} = \frac{(t^2 + 4u^2)(t^2 + 19u^2)}{(t^2 + 19u^2)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

は有理数の平方であるから,

$$(t^2 + 4u^2)(t^2 + 19u^2) = w^2 \tag{8}$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 + 4u^2, u^2) &= \gcd(t^2, u^2) = 1 \\ \gcd(t^2 + 4u^2, t^2 + 19u^2) &= \gcd(t^2 + 4u^2, t^2 + 4u^2 + 15u^2) \\ &= \gcd(t^2 + 4u^2, 15u^2) \\ &= \gcd(t^2 + 4u^2, 15) \\ &= 1, 3, 5, 15 \end{aligned}$$

であるから, (8) より

$$\gcd(t^2 + 4u^2, t^2 + 19u^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (5g^2, 5h^2), (15g^2, 15h^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h (g は奇数) が存在する。

$t^2 + 4u^2 \equiv 1$ または $5 \pmod{8}$ より

$$t^2 + 4u^2 = g^2 \quad (u \text{ は偶数}) \tag{9}$$

または

$$t^2 + 4u^2 = 5g^2 \quad (u \text{ は奇数}) \tag{10}$$

Case (9)

$$t^2 + 4u^2 = g^2 \quad (u \text{ は偶数}) \tag{9}$$

$$t^2 + 19u^2 = h^2 \tag{11}$$

のとき, (9) にピタゴラス方程式の定理^{注3}を適用すると,

$$t = m^2 - n^2, \quad 2u = 2mn, \quad g = m^2 + n^2 \tag{12}$$

を満たす互いに素で偶奇が異なる自然数 m, n が存在する。(11) に代入すると

$$\begin{aligned} h^2 &= (m^2 - n^2)^2 + 19m^2 n^2 \\ &= m^4 + 17m^2 n^2 + n^4 \end{aligned} \tag{13}$$

(13) を満たす正の奇数 m , 正の偶数 n から始めて以上を逆に辿ると, (12) より

$$t = |m^2 - n^2|, \quad u = mn, \quad g = m^2 + n^2 \tag{14}$$

ここで, $g = m^2 + n^2$ と h が共通な素因数 p をもつとすれば,^{注5}

$$h^2 = (m^2 + n^2)^2 + 15m^2 n^2$$

より

$$p \mid 15m^2 n^2$$

$p \mid m^2$ または $p \mid n^2$ ならば, $p \mid m^2 + n^2$ より $p \mid m^2$ かつ $p \mid n^2$ となって m と n が互い

に素であることに反するから，

$$p \mid 15, \text{したがって, } p = 3 \text{ または } p = 5$$

(i) $p = 3$ のとき

$$3 \nmid m, 3 \nmid n \text{ より}$$

$$m^2 \equiv n^2 \equiv 1 \pmod{3}, g = m^2 + n^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

であるから， $3 \mid g$ に反する。

(ii) $p = 5$ のとき

$$5 \nmid m, 5 \nmid n \text{ より, } m^2, n^2 \text{ を } 5 \text{ で割った余りは } 1 \text{ または } 4 \text{ であり,}$$

$$g = m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod{5}$$

であるから，

$$m^2 \equiv 1, n^2 \equiv 4 \pmod{5} \text{ または } m^2 \equiv 4, n^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

m^2, n^2 を $1 + q, 4 + r$ (q, r は整数) とおくと

$$h^2 = m^4 + 17m^2n^2 + n^4$$

$$= (1 + q)^2 + 17(1 + q)(1 + r) + (1 + r)^2$$

$$= 85 + 5^2(14q + 5r + 17qr + q^2 + r^2)$$

$$\equiv 85 \not\equiv 0 \pmod{5^2} \text{ となって, } 5^2 \mid h^2 \text{ に反する。}$$

よって，

$$g \text{ と } h \text{ は互いに素}^{\text{注5}}$$

である。(7)に代入して

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{(m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2}{(m^2 - n^2)^2 + 19m^2n^2} = \frac{(m^2 + n^2)^2}{h^2}$$

$$\frac{s}{v} = \frac{m^2 + n^2}{h}$$

a と b は互いに素であるから，(5), (6)より s と v は互いに素であり， $m^2 + n^2 = g$ と h は互いに素であるから，

$$s = m^2 + n^2, v = h \tag{15}$$

(14), (15)を (5), (6)に代入して

$$x = (m^2 + n^2) |m^2 - n^2| = |m^4 - n^4|$$

$$y = 2mnh$$

z については，定理の証明における計算と同様にして

$$z^2 = x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = \dots = (m^2 + n^2)^4 + 30m^2n^2(m^4 + n^4)$$

が得られる。

定理で触れなかった解たち Case (10)

$$t^2 + 4u^2 = 5g^2 \quad (u \text{ は奇数}) \tag{10}$$

$$t^2 + 19u^2 = 5h^2 \tag{16}$$

のとき，(16) - (10)より

$$15u^2 = 5h^2 - 5g^2$$

$$3u^2 = h^2 - g^2 = (h + g)(h - g) \quad (17)$$

ここで, $h + g$ と $h - g$ が共通の素因数 p をもつとすれば, $p^2 \mid 3u^2$ より p は奇素数であり,

$$\begin{aligned} p \mid h + g \text{ かつ } p \mid h - g &\implies p \mid 2h \text{ かつ } p \mid 2g \\ &\implies p \mid h \text{ かつ } p \mid g \end{aligned}$$

となつて g と h が互いに素であることに反するから,

$$h + g \text{ と } h - g \text{ は互いに素}$$

である。(17)より

$$(u, h + g, h - g) = (kl, 3k^2, \ell^2) \text{ または } (kl, \ell^2, 3k^2)$$

を満たす互いに素な正の奇数 k, ℓ が存在して

$$u = kl, \quad 2h = 3k^2 + \ell^2, \quad 2g = |3k^2 - \ell^2| \quad (18)$$

(10)に [2] 定理 1 を適用すると

$$u = m^2 + mn - n^2, \quad t = |m^2 - 4mn - n^2|, \quad g = m^2 + n^2 \quad (19)$$

を満たす互いに素な整数 m, n ($m > 0, n \neq 0$) が存在する。

(18), (19)より

$$\begin{aligned} u = kl = m^2 + mn - n^2 \\ 2g = |3k^2 - \ell^2| = 2(m^2 + n^2) \end{aligned} \quad (20)$$

k, ℓ は奇数であるから

$$3k^2 - \ell^2 \equiv 2 \pmod{8}$$

$g = m^2 + n^2$ は奇数であるから m と n は偶奇が異なり,

$$m^2 + n^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 2(m^2 + n^2) \equiv 2 \pmod{8}$$

となるから,

$$2g = 3k^2 - \ell^2 = 2(m^2 + n^2) \quad (21)$$

以下, (20)かつ(21)を満たす k, ℓ, m, n について条件を調べることで, 理論上はすべての原始解が求められるはずである。しかし, [3], [4]と同様にしてこれまでの手法を繰り返すだけでは, 膨大な量の作業と表記になりそうである。何とか新しいアイデアを見つけ出して, 簡略化できるようにしたいものである。

注1 自然数解 (x_0, y_0, z_0) が一つ見つかり、任意の整数 d に対して (x_0d, y_0d, z_0d^2) も整数解となるから、単に無数にあるというだけでは意味がない。原始解 (x, y, z) が互いに素である整数解が無数個ということになれば、本質的な意味で無数個ということになる。

注2 厳密には、数学的帰納法による。 $x_1 = 1$ は奇数、 $y_1 = 4$ は偶数であり、 x_n が奇数、 y_n が偶数であるとすれば、 $x_{n+1} = |x_n^4 - y_n^4|$ は奇数、 $y_{n+1} = 2x_ny_nz_n$ は偶数である。

注3 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき、

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが、必要ならば [1] pp.20-22 などを参照されるとよい。

注4 (12)において $t = m^2 - n^2$ は t に応じて m, n が定まっているが、(13)において先に m, n を定めると、 $m^2 - n^2 > 0$ の場合と $m^2 - n^2 < 0$ の場合が起こり得る。

注5 背景説明としては省いてもよいが、 $h^2 = m^4 + 17m^2n^2 + n^4$ を満たす互いに素な自然数 m, n の存在から始めた論述としては、 $g = m^2 + n^2$ と h が互いに素であることを示す必要がある。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $(5x^2 - 4y^2)(5y^2 - 4x^2) = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2020),
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(5x2-4y2\)\(5y2-4x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(5x2-4y2)(5y2-4x2)=z2.pdf)
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 15x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2021),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+15x2y2+y4=z2.pdf>
- [4] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2023),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+16x2y2+y4=z2.pdf>