

方程式 $x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

本稿では、方程式 $x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解とそれに関連する方程式について考察する。 $x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$ を変形してより小さい自然数解に対する同じ方程式を導く(無限降下法に持ち込む)ことがどうも難しい^{注1} ようなので、途中に出てくる方程式 $x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解問題を先に解決しておく。

定理 1 方程式

$$x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

定理 2 方程式

$$x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

応用として、次の結果も得られる。

定理 3 自然数 x, y, z が方程式

$$5x^4 - 6x^2y^2 + 5y^4 = z^2$$

を満たすならば、 $x = y$ が成り立つ。

定理 1 の証明

$$x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) の中に $x \neq y$ であるものが存在するとして、そのうち z が最小

である場合を考える。

$\gcd(x, y) = \delta$ とすると、 $\delta^4 | z^2$ より $\delta^2 | z$ であり、

$$x = \delta x_1, y = \delta y_1, z = \delta^2 z_1$$

を満たす自然数 x_1, y_1, z_1 が存在して

$$x_1^4 - 3x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つ。 z の最小性より $\delta = 1$ であり、

x と y は互いに素である。

x, y がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$x^4 - 3x^2y^2 + y^4 \equiv 1 - 3 + 1 \equiv 7 \pmod{8}$$

となって $z^2 \equiv 1 \pmod{8}$ と矛盾するから、

$$x \not\equiv y \pmod{2}$$

対称性より

x は奇数, y は偶数

であるとして証明すれば十分である。

(1)を変形すると

$$(x^2 - y^2)^2 - (xy)^2 = z^2 \quad (2)$$

$x^2 - y^2$ と xy が共通の素因数 p をもつとすれば,

$$p \mid xy \text{ より } p \mid x \text{ または } p \mid y$$

であり, いずれの場合も $p \mid x^2 - y^2$ より $p \mid x$ かつ $p \mid y$ となって矛盾するから,

$$x^2 - y^2 \text{ と } xy \text{ は互いに素}$$

である。(2)にピタゴラス方程式の定理^{注2}を適用すると,

$$|x^2 - y^2| = m^2 + n^2 \quad (3)$$

$$xy = 2mn \quad (4)$$

$$z = |m^2 - n^2| \quad (5)$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数 m, n が存在する。

m, n について対称であるから,

$$m \text{ は奇数, } n \text{ は偶数}$$

であるとしてよい。

$$\gcd(x, m) = s \text{ とすると,}$$

$$x = st, \quad m = su \quad (6)$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(4)より

$$ty = 2un$$

であり, t と $2u$ は互いに素であるから,

$$y = 2uv, \quad n = tv \quad (7)$$

を満たす自然数 v がある。(3)に(6), (7)を代入して

$$|s^2t^2 - 4u^2v^2| = s^2u^2 + t^2v^2$$

I $s^2t^2 - 4u^2v^2 = s^2u^2 + t^2v^2$ のとき

$$(t^2 - u^2)s^2 = (t^2 + 4u^2)v^2$$

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{t^2 - u^2}{t^2 + 4u^2} = \frac{(t^2 - u^2)(t^2 + 4u^2)}{(t^2 + 4u^2)^2}$$

は正の有理数の平方であるから,

$$(t^2 - u^2)(t^2 + 4u^2) = w^2 \quad (8)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(t^2 - u^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$$\gcd(t^2 - u^2, t^2 + 4u^2) = \gcd(t^2 - u^2, t^2 - u^2 + 5u^2)$$

$$= \gcd(t^2 - u^2, 5u^2)$$

$$= \gcd(t^2 - u^2, 5)$$

$$= 1 \text{ または } 5$$

であるから, (8)より

$$(t^2 - u^2, t^2 + 4u^2) = (g^2, h^2) \text{ または } (5g^2, 5h^2)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。 t, u は奇数で

$$t^2 + 4u^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

であるから,

$$t^2 - u^2 = 5g^2 \tag{9}$$

$$t^2 + 4u^2 = 5h^2 \tag{10}$$

に限られる。ここで,

g は偶数, h は奇数

である。(9) \times 4 + (10) より

$$5t^2 = 20g^2 + 5h^2$$

$$t^2 = (2g)^2 + h^2$$

$2g$ と h は互いに素であるから, ピタゴラス方程式の定理^{注2}を適用すると

$$t = k^2 + \ell^2, \quad 2g = 2k\ell, \quad h = k^2 - \ell^2$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在する。(9)に代入すると

$$u^2 = (k^2 + \ell^2)^2 - 5k^2\ell^2 = k^4 - 3k^2\ell^2 + \ell^4 \tag{11}$$

が成り立つ。ところが, (5), (6) より

$$u \leq su = m < m + n \leq (m + n)|m - n| = z$$

であるから, (11) の成立は z の最小性に反する。

II $4u^2v^2 - s^2t^2 = s^2u^2 + t^2v^2$ のとき

$$(t^2 + u^2)s^2 = (4u^2 - t^2)v^2$$

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{4u^2 - t^2}{t^2 + u^2} = \frac{(t^2 + u^2)(4u^2 - t^2)}{(t^2 + u^2)^2}$$

は正の有理数の平方であるから,

$$(t^2 + u^2)(4u^2 - t^2) = w^2$$

を満たす自然数 w が存在する。ところが,

$$t^2 \equiv u^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

より $(t^2 + u^2)(4u^2 - t^2) \equiv 6 \pmod{8}$ となつて, w^2 を 8 で割った余りが 0, 1, 4 のいずれかであることと矛盾する。 ■

定理 2 の証明

$$x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{12}$$

を満たす自然数 x, y, z が存在するものとする。

$\gcd(x, y) = \delta$ とすると, $\delta^4 | z^2$ より $\delta^2 | z$ であり,

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta^2 z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在して,

$$x_1^4 + 18x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つから,

x と y は互いに素

であるとして定理を証明すれば十分である。(12)を変形すると

$$(x^2 + y^2)^2 + (4xy)^2 = z^2 \quad (13)$$

I x と y の偶奇が異なるとき

対称性より

x が奇数, y が偶数

であるとしてよい。 $x^2 + y^2$ と $4xy$ が共通の素因数 p をもつとすれば, $p \mid x^2 + y^2$ より p は奇素数であり, $p \mid 4xy$ より $p \mid x$ または $p \mid y$ であるが, いずれの場合も $p \mid x^2 + y^2$ より $p \mid x$ かつ $p \mid y$ となって x と y が互いに素であることに反するから,

$x^2 + y^2$ と $4xy$ は互いに素

である。そこで, (13)にピタゴラス方程式の定理^{註2}を適用すると,

$$x^2 + y^2 = m^2 - n^2 \quad (14)$$

$$4xy = 2mn \quad (15)$$

$$z = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数 m, n が存在する。

$x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから, (14)より

m は奇数, n は偶数

に定まる。

$\gcd(x, m) = s$ とおくと,

$$x = st, \quad m = su \quad (16)$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(15)より

$$2ty = un$$

となるが, $2t$ と u は互いに素であるから,

$$y = uv, \quad n = 2tv \quad (17)$$

を満たす自然数 v が存在する。

(16), (17)を(14)に代入すると

$$s^2 t^2 + u^2 v^2 = s^2 u^2 - 4t^2 v^2$$

$$(4t^2 + u^2)v^2 = s^2(u^2 - t^2)$$

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{u^2 - t^2}{4t^2 + u^2} = \frac{(u^2 - t^2)(4t^2 + u^2)}{(4t^2 + u^2)^2}$$

は正の有理数の平方であるから,

$$(u^2 - t^2)(4t^2 + u^2) = w^2 \quad (18)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(u^2 - t^2, t^2) = \gcd(u^2, t^2) = 1$$

$$\gcd(u^2 - t^2, 4t^2 + u^2) = \gcd(u^2 - t^2, u^2 - t^2 + 5t^2)$$

$$= \gcd(u^2 - t^2, 5t^2)$$

$$= \gcd(u^2 - t^2, 5)$$

$$= 1 \text{ または } 5$$

であるから , (18) より

$$(u^2 - t^2, 4t^2 + u^2) = (g^2, h^2) \text{ または } (5g^2, 5h^2)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。 t, u は奇数で

$$4t^2 + u^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

であるから ,

$$u^2 - t^2 = 5g^2 \tag{19}$$

$$4t^2 + u^2 = 5h^2 \tag{20}$$

に限られる。ここで ,

g は偶数 , h は奇数

である。 (19) $\times 4 +$ (20) より

$$5u^2 = 20g^2 + 5h^2$$

$$u^2 = (2g)^2 + h^2$$

$2g$ と h は互いに素であるから , ピタゴラス方程式の定理^{注2}を適用すると

$$u = k^2 + \ell^2, \quad 2g = 2k\ell, \quad h = k^2 - \ell^2$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在する。 (19) に代入すると

$$t^2 = (k^2 + \ell^2)^2 - 5k^2\ell^2 = k^4 - 3k^2\ell^2 + \ell^4$$

が成り立つが , これは定理 1 に反する。

II x, y がともに奇数のとき

(13) はさらに

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 + (2xy)^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \tag{21}$$

と書き直すことができる。 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \text{ は奇数}$$

であるから , I のときと同様にして

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \text{ と } 2xy \text{ は互いに素}$$

であることがわかり , (21) にピタゴラス方程式の定理^{注2}を適用すると ,

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = m^2 - n^2, \quad 2xy = 2mn, \quad \frac{z}{2} = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数 m, n が存在して ,

$$x^2 + y^2 = 2(m^2 - n^2) \tag{22}$$

$$xy = mn \tag{23}$$

$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから , (22) より $m^2 - n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であり ,

m は奇数 , n は偶数

である。

$\gcd(x, m) = s$ とおくと ,

$$x = st, \quad m = su \tag{24}$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(23)より

$$ty = un$$

であり, t と u は互いに素であるから,

$$y = uv, \quad n = tv \tag{25}$$

を満たす自然数 v が存在する。(24), (25)を(22)に代入すると

$$\begin{aligned} s^2 t^2 + u^2 v^2 &= 2s^2 u^2 - 2t^2 v^2 \\ (2t^2 + u^2)v^2 &= (2u^2 - t^2)s^2 \\ \frac{v^2}{s^2} &= \frac{2u^2 - t^2}{2t^2 + u^2} = \frac{(2u^2 - t^2)(2t^2 + u^2)}{(2t^2 + u^2)^2} \end{aligned}$$

は正の有理数の平方であるから,

$$(2u^2 - t^2)(2t^2 + u^2) = w^2$$

を満たす自然数 w が存在する。ところが, t, u は奇数であるから

$$\begin{aligned} t^2 &\equiv u^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ (2u^2 - t^2)(2t^2 + u^2) &\equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

であり, $w^2 \equiv 1 \pmod{4}$ と矛盾する。 ■

定理3の証明

$$5x^4 - 6x^2y^2 + 5y^4 = z^2 \tag{26}$$

を満たす自然数 x, y, z が存在するとき, 対称性より

$$x \geq y$$

であるとしてよい。ここで, $x > y$ であるとすれば,

$$a = x + y, \quad b = x - y \text{ はともに自然数}$$

であり,

$$2x = a + b, \quad 2y = a - b$$

(26)を変形すると

$$\begin{aligned} 5(2x)^4 - 6(2x)^2(2y)^2 + 5(2y)^4 &= 16z^2 \\ 5(a+b)^4 - 6(a+b)^2(a-b)^2 + 5(a-b)^4 &= 16z^2 \\ 5 \cdot 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4) - 6(a^2 - b^2)^2 &= 16z^2 \\ 4a^4 + 72a^2b^2 + 4b^4 &= 16z^2 \\ a^4 + 18a^2b^2 + b^4 &= (2z)^2 \end{aligned}$$

となるが, これは定理2に反する。したがって,

$$a \text{ または } b \text{ は自然数でない}$$

が, $a = x + y > 0$ であるから

$$b = x - y = 0, \quad \text{すなわち } x = y$$

が成り立つ。 ■

注1 いくらか変形を試した上での判断ではあるが，筆者が思いつかないような変形でうまくいく可能性がないわけではない。

注2 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき，

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが，必要ならば [1] pp.20 – 22 などを参照されるとよい。

参考文献

- [1] 足立恒雄，フェルマーの大定理，筑摩書房 (2006).
- [2] T.Andreescu, D.Andrica, and I.Cucurezeanu
An Introduction to Diophantine Equations, Birkhäuser (2010)
- [3] 大塚美紀生，方程式 $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2021)，
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+14x2y2+y4=z2.pdf>
- [4] 大塚美紀生，方程式 $x^4 + 17x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2023)，
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+17x2y2+y4=z2.pdf>