

方程式 $x^4 + 19x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

定理 不定方程式

$$x^4 + 19x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

定理の証明

$$x^4 + 19x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数 x, y, z が存在すると仮定して、そのうち

z が最小

となる場合を考えることにする。

$d = \gcd(x, y)$ とすると、(1) より $d^4 \mid z^2$ であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し、

$$x_1^4 + 19x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

を満たすから、

x と y が互いに素

であるとして証明すれば十分である。

ここで、 x と y がともに奇数であるとすれば、(1) より z も奇数であり、

$$x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

となるから

$$x^2 + 19x^2y^2 + y^4 \equiv 1 + 19 + 1 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって、(1) に反するから x と y の偶奇は異なる。さらに、対称性より

x が奇数、 y が偶数

であるとしてよい。

(1) を変形すると、

$$(x^2 + y^2)^2 + 17x^2y^2 = z^2$$

$$17x^2y^2 = (z + x^2 + y^2)(z - x^2 - y^2)$$

$$17x^2 \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \frac{z + x^2 + y^2}{2} \cdot \frac{z - x^2 - y^2}{2} \tag{2}$$

$\frac{z + x^2 + y^2}{2}$ と $\frac{z - x^2 - y^2}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば、

$$\begin{aligned} p \mid x^2 + y^2 \text{ かつ } p^2 \mid 17x^2y^2 &\implies p \mid x^2 + y^2 \text{ かつ } p \mid x^2y^2 \\ &\implies p \mid x^2 \text{ かつ } p \mid y^2 \end{aligned}$$

となって x と y が互いに素であることに反するから、

$$\frac{z+x^2+y^2}{2} \text{ と } \frac{z-x^2-y^2}{2} \text{ は互いに素}$$

であり, (2)より

$$\left(\frac{z+x^2+y^2}{2}, \frac{z-x^2-y^2}{2}, \frac{xy}{2} \right) = (17a^2, b^2, ab) \text{ または } (b^2, 17a^2, ab)$$

を満たす互いに素な自然数 a, b ($17 \nmid b$) が存在して

$$x^2 + y^2 = |17a^2 - b^2| \quad (3)$$

$$xy = 2ab \quad (4)$$

$x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから, (3)より

$$a \not\equiv b \pmod{2}$$

よって, a と b の一方は偶数となるから (4)より y は 4 の倍数であり, (3)より

$$a, b \text{ の一方は奇数, 他方は 4 の倍数}^{\text{注1}}$$

である。

I a が奇数, b が 4 の倍数であるとき

$$a^2 \equiv 1, \quad b^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であるから, (3)は

$$x^2 + y^2 = 17a^2 - b^2$$

$\gcd(x, y) = s$ とおくと, s は奇数であり,

$$x = st, \quad a = su \quad (5)$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(4)より

$$ty = 2ub$$

t と $2u$ は互いに素であるから,

$$y = 2uv, \quad b = tv \quad (6)$$

を満たす正の 4 の倍数 v が存在する。

(3)に (5), (6)を代入して,

$$s^2 t^2 + 4u^2 v^2 = 17s^2 u^2 - t^2 v^2$$

$$(t^2 + 4u^2)v^2 = (17u^2 - t^2)s^2$$

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{17u^2 - t^2}{t^2 + 4u^2} = \frac{(t^2 + 4u^2)(17u^2 - t^2)}{(t^2 + 4u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$(t^2 + 4u^2)(17u^2 - t^2) = w^2 \quad (7)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(t^2 + 4u^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 + 4u^2, 17u^2 - t^2) &= \gcd(t^2 + 4u^2, 21u^2 - (t^2 + 4u^2)) \\ &= \gcd(t^2 + 4u^2, 21u^2) \\ &= \gcd(t^2 + 4u^2, 21) \\ &= 1, 3, 7, 21 \end{aligned}$$

であるから, (7)より

$(t^2 + 4u^2, 17u^2 - t^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (7g^2, 7h^2), (21g^2, 21h^2)$
 のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。

t, u は奇数で $t^2 \equiv u^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であることより

$$t^2 + 4u^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

であるから,

$$t^2 + 4u^2 = 21g^2, \quad 17u^2 - t^2 = 21h^2$$

に定まる。このとき

$$21g^2 = t^2 + 4u^2 \equiv t^2 + u^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

であるが, これを満たすのは

$$t \equiv u \equiv 0 \pmod{3}$$

の場合に限られ, t と u が互いに素であることに反する。

II b が奇数, a が 4 の倍数であるとき

$$b^2 \equiv 1, \quad a^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であるから, (3) は

$$x^2 + y^2 = b^2 - 17a^2$$

$\gcd(x, b) = s$ とおくと, s は奇数であり,

$$x = st, \quad b = su \tag{8}$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(4) より

$$ty = 2au$$

t と $2u$ は互いに素であるから,

$$y = 2uv, \quad a = tv \tag{9}$$

を満たす正の 4 の倍数 v が存在する。

(3) に (8), (9) を代入して,

$$\begin{aligned} s^2 t^2 + 4u^2 v^2 &= s^2 u^2 - 17t^2 v^2 \\ (17t^2 + 4u^2)v^2 &= (u^2 - t^2)s^2 \\ \frac{v^2}{s^2} &= \frac{u^2 - t^2}{17t^2 + 4u^2} = \frac{(u^2 - t^2)(17t^2 + 4u^2)}{(17t^2 + 4u^2)^2} \end{aligned}$$

は有理数の平方であるから,

$$(u^2 - t^2)(17t^2 + 4u^2) = w^2 \tag{10}$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned} \gcd(u^2 - t^2, t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(u^2 - t^2, 17t^2 + 4u^2) &= \gcd(u^2 - t^2, 4(u^2 - t^2) + 21t^2) \\ &= \gcd(u^2 - t^2, 21t^2) \\ &= \gcd(u^2 - t^2, 21) \\ &= 1, 3, 7, 21 \end{aligned}$$

であるから, (10) より

$$(u^2 - t^2, 17t^2 + 4u^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (7g^2, 7h^2), (21g^2, 21h^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。

t, u は奇数で $t^2 \equiv u^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であることより

$$17t^2 + 4u^2 \equiv 17 + 4 \equiv 21 \equiv 5 \pmod{8}$$

であるから,

$$u^2 - t^2 = 21g^2 \quad (11)$$

$$17t^2 + 4u^2 = 21h^2 \quad (12)$$

に定まる。(12) - (11) $\times 4$ より

$$21t^2 = 21h^2 - 21 \cdot 4g^2$$

$$t^2 + (2g)^2 = h^2$$

ピタゴラス方程式の定理^{注2}を適用すると,

$$t = m^2 - n^2, \quad 2g = 2mn, \quad h = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在する。これを (11) に代入すると,

$$u^2 = (m^2 - n^2)^2 + 21(mn)^2 = m^4 + 19m^2n^2 + n^4 \quad (13)$$

(9), (1) より

$$u^2 < 4u^2v^2 = y^2 \leq y^4 < z^2$$

であるから, (13) の成立は z の最小性に反する。 ■

注1 この部分をもう少し詳しく説明すると, x は奇数, y は4の倍数であるから,

$$x^2 \equiv 1, \quad y^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

(3) より $|17a^2 - b^2| \equiv 1 \pmod{8}$ となるが, これは

$$a^2 \equiv 1, \quad b^2 \equiv 0 \pmod{8} \quad \text{または} \quad a^2 \equiv 0, \quad b^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

を表す。 $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ のときは a は奇数であり, b^2 が 2^3 で割り切れるときは

b が2で割り切れ, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ が2で割り切れるから, 結局 b は4で割り切れる。

$a^2 \equiv 0, \quad b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ の場合も同様である。

注2 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが, 必要ならば [1] pp.20-22 などを参照されるとよい。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 11x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2020),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+11x2y2+y4=z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2024),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+18x2y2+y4=z2.pdf>