

# 方程式 $x^4 + 20x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

## 不定方程式

$$\begin{aligned}x^4 + 8x^2y^2 + y^4 &= z^2, \\x^4 + 12x^2y^2 + y^4 &= z^2, \\x^4 + 16x^2y^2 + y^4 &= z^2\end{aligned}$$

には原始解<sup>注1</sup>が無数に存在したので、方程式  $x^4 + 20x^2y^2 + y^4 = z^2$  の場合も同様ではないかと予想していたが、実際には異なる結果が得られた。係数の値などから解の構造を判断する指標は、まだまだ見出せないようである。

## 定理 不定方程式

$$x^4 + 20x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

## 定理の証明

(1)を満たす自然数  $x, y, z$  が存在すると仮定して、そのうち  $z$  が最小

となる場合を考えることにする。

$d = \gcd(x, y)$  とすると、(1)より  $d^4 \mid z^2$  であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2z_1$$

となる自然数  $x_1, y_1, z_1$  が存在し、

$$x_1^4 + 20x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

を満たすから、

$x$  と  $y$  が互いに素

であるとして証明すれば十分である。

$x, y$  がともに奇数であるとすれば、

$$x^4 + 20x^2y^2 + y^4 \equiv 1 + 20 + 1 \equiv 6 \pmod{8}$$

となって、 $z^2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$  と矛盾するから、 $x$  と  $y$  の偶奇は異なる。(1)は  $x$  と  $y$  について対称であるから、

$x$  は偶数、 $y$  は奇数

である場合だけ考えればよい。このとき  $z$  は奇数である。

(1)を変形すると

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)^2 + 22x^2y^2 &= z^2 \\22x^2y^2 &= (z + x^2 - y^2)(z - x^2 + y^2) \\22\left(\frac{x}{2}\right)^2y^2 &= \frac{z + x^2 - y^2}{2} \cdot \frac{z - x^2 + y^2}{2}\end{aligned} \quad (2)$$

ここで， $x^2 > y^2$ ならば  $z + x^2 - y^2 > 0$  であり，(2)より  $z - x^2 + y^2 > 0$  である。  
 $x^2 < y^2$ ならば  $z - x^2 + y^2 > 0$  であり，(2)より  $z + x^2 - y^2 > 0$  であるから，いずれにしても

$$z + x^2 - y^2 > 0 \text{かつ} z - x^2 + y^2 > 0$$

である。  $\frac{z+x^2-y^2}{2}$  と  $\frac{z-x^2+y^2}{2}$  が共通の素因数  $y$  を持つとすれば，

$$\begin{aligned} p \mid x^2 - y^2, \quad p^2 \mid 22\left(\frac{x}{2}\right)^2 y^2 &\implies p \mid x^2 - y^2, \quad p \mid x^2 y^2 \\ &\implies p \mid x^2, \quad p \mid y^2 \end{aligned}$$

となって， $x$  と  $y$  が互いに素であることに反するから，

$$\frac{z+x^2-y^2}{2} \text{ と } \frac{z-x^2+y^2}{2} \text{ は互いに素}$$

である。したがって，(2)より

$$\begin{aligned} \left( \frac{z+x^2-y^2}{2}, \frac{z-x^2+y^2}{2}, \frac{xy}{2} \right) &= (22a^2, b^2, ab), \\ &= (b^2, 22a^2, ab), \\ &= (2a^2, 11b^2, ab), \\ &= (11b^2, 2a^2, ab) \end{aligned}$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数  $a, b$  ( $b$  は奇数) が存在して，

$$xy = 2ab \tag{3}$$

$$|x^2 - y^2| = |22a^2 - b^2| \text{ または } |2a^2 - 11b^2| \tag{4}$$

$x^2 - y^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$  であることを考えて， $a$  が奇数のとき

$$22a^2 - b^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 2a^2 - 11b^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

であるから，

$$x^2 - y^2 = b^2 - 22a^2 \text{ または } 2a^2 - 11b^2$$

$a$  が偶数のとき

$$22a^2 - b^2 \equiv -1 \pmod{8}, \quad 2a^2 - 11b^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

であるから，

$$x^2 - y^2 = 22a^2 - b^2 \quad (x \text{ は } 4 \text{ の倍数})$$

または

$$x^2 - y^2 = 11b^2 - 2a^2 \quad (x \text{ は } 4 \text{ で割れない偶数})$$

以下，(4)において  $x^2 - y^2$  が

$$b^2 - 22a^2, \quad 2a^2 - 11b^2, \quad 22a^2 - b^2, \quad 11b^2 - 2a^2$$

のいずれであるかによって場合分けして調べていくことにする。

$$\gcd(y, b) = s \text{ とおくと，}$$

$$y = st, \quad b = su \tag{5}$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在する。(3)より

$$xt = 2au$$

であるが， $t$  と  $2u$  は互いに素であるから，

$$x = 2uv, \quad a = tv \quad (6)$$

を満たす自然数  $v$  が存在する。

**I**  $x^2 - y^2 = b^2 - 22a^2$  ( $a, b$  はともに奇数) のとき

(5), (6) を代入すると

$$\begin{aligned} 4u^2v^2 - s^2t^2 &= s^2u^2 - 22t^2v^2 \\ (t^2 + u^2)s^2 &= 2(11t^2 + 2u^2)v^2 \end{aligned}$$

となって、

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{2(11t^2 + 2u^2)}{t^2 + u^2} = \frac{2(t^2 + u^2)(11t^2 + 2u^2)}{(t^2 + u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから、

$$2(t^2 + u^2)(11t^2 + 2u^2) = w^2 \quad (7)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $11t^2 + 2u^2$  は奇数であるから、

$$\gcd(2(t^2 + u^2), 11t^2 + 2u^2) = \gcd(t^2 + u^2, 11t^2 + 2u^2)$$

$\gcd(t, u) = 1$  より

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 + u^2, t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(t^2 + u^2, 11t^2 + 2u^2) &= \gcd((t^2 + u^2, 9t^2 + 2(t^2 + u^2)) \\ &= \gcd(t^2 + u^2, 9t^2) \\ &= \gcd(t^2 + u^2, 9) \\ &= 1, 3, 9 \end{aligned}$$

であるから、(7) より

$$(2(t^2 + u^2), 11t^2 + 2u^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数  $g, h$  ( $g$  は偶数,  $h$  は奇数) が存在する。

$t, u, h$  は奇数であり、

$$11t^2 + 2u^2 \equiv 11 + 2 \equiv 5 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから、いずれの場合もあてはまらない。

**II**  $x^2 - y^2 = 2a^2 - 11b^2$  ( $a, b$  はともに奇数) のとき

(5), (6) を代入すると

$$\begin{aligned} 4u^2v^2 - s^2t^2 &= 2t^2v^2 - 11s^2u^2 \\ (t^2 - 11u^2)s^2 &= 2(2u^2 - t^2)v^2 \end{aligned}$$

となって、 $t^2 - 11u^2 \equiv 1 - 11 \equiv 6 \pmod{8}$  を考えると

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{2(2u^2 - t^2)}{t^2 - 11u^2} = \frac{2(t^2 - 11u^2)(2u^2 - t^2)}{(t^2 - 11u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから、

$$2(t^2 - 11u^2)(2u^2 - t^2) = w^2 \quad (8)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $2u^2 - t^2$  は奇数であるから、

$$\gcd(2(t^2 - 11u^2), 2u^2 - t^2) = \gcd(t^2 - 11u^2, 2u^2 - t^2)$$

$$gcd(t, u) = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} gcd(u^2, 2u^2 - t^2) &= gcd(u^2, t^2) = 1 \\ gcd(t^2 - 11u^2, 2u^2 - t^2) &= gcd(t^2 - 2u^2 - 9u^2, 2u^2 - t^2) \\ &= gcd(9u^2, 2u^2 - t^2) \\ &= gcd(9, 2u^2 - t^2) \\ &= 1, 3, 9 \end{aligned}$$

であるから、(8)より

$$(2(t^2 - 11u^2), 2u^2 - t^2) = (g^2, h^2), (-g^2, -h^2), (3g^2, 3h^2), (-3g^2, -3h^2), (9g^2, 9h^2), (-9g^2, -9h^2)$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数  $g, h$  ( $g$  は偶数,  $h$  は奇数) が存在する。

$t, u, h$  は奇数であり、

$$2u^2 - t^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから、

$$2t^2 - 22u^2 = g^2, \quad 2u^2 - t^2 = h^2 \tag{9}$$

または

$$2t^2 - 22u^2 = 9g^2, \quad 2u^2 - t^2 = 9h^2 \tag{10}$$

の場合に限られる。

(9)のとき、 $t$  を消去すると

$$g^2 + 2h^2 = -18u^2$$

となって、左辺は正、右辺は負であるから矛盾する。

(10)のときも、 $t$  を消去すると

$$g^2 + 2h^2 = -2u^2$$

となって、左辺は正、右辺は負であるから矛盾する。

### III $x^2 - y^2 = 11b^2 - 2a^2$ ( $a$ は偶数, $b$ は奇数) のとき

(5), (6) を代入すると

$$\begin{aligned} 4u^2v^2 - s^2t^2 &= 11s^2u^2 - 2t^2v^2 \\ (t^2 + 11u^2)s^2 &= 2(t^2 + 2u^2)v^2 \end{aligned}$$

となって、

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{2(t^2 + 2u^2)}{t^2 + 11u^2} = \frac{2(t^2 + 11u^2)(t^2 + 2u^2)}{(t^2 + 11u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから、

$$2(t^2 + 11u^2)(t^2 + 2u^2) = w^2 \tag{11}$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $t^2 + 2u^2$  は奇数であるから、

$$gcd(2(t^2 + 11u^2), t^2 + 2u^2) = gcd(t^2 + 11u^2, t^2 + 2u^2)$$

$gcd(t, u) = 1$  より

$$gcd(u^2, t^2 + 2u^2) = gcd(u^2, t^2) = 1$$

$$gcd(t^2 + 11u^2, t^2 + 2u^2) = gcd(t^2 + 2u^2 + 9u^2, t^2 + 2u^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \gcd(9u^2, t^2 + 2u^2) \\
&= \gcd(9, t^2 + 2u^2) \\
&= 1, 3, 9
\end{aligned}$$

であるから、(11)より

$$(2(t^2 + 11u^2), t^2 + 2u^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数  $g, h$  が存在する。  $t, u$  は奇数であり、

$$t^2 + 11u^2 \equiv 1 + 11 \equiv 4 \pmod{8}$$

であるから、 $t^2 + 11u^2$  は  $2^2$  で割れるが、 $2^3$  で割れない。よって、

$$2(t^2 + 11u^2) \text{ は } 2 \text{ でちょうど } 3 \text{ 回割り切れる。}$$

ところが、 $g^2, 3g^2, 9g^2$  はいずれも 2 で偶数回割り切れるから矛盾する。

#### IV $x^2 - y^2 = 22a^2 - b^2$ ( $a$ は偶数、 $b$ は奇数) のとき

(5), (6) を代入すると

$$4u^2v^2 - s^2t^2 = 22t^2v^2 - s^2u^2$$

$$2(11t^2 - 2u^2)v^2 = (u^2 - t^2)s^2$$

となって、 $11t^2 - 2u^2$  が奇数であることを考えると

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{u^2 - t^2}{2(11t^2 - 2u^2)} = \frac{2(u^2 - t^2)(11t^2 - 2u^2)}{2(11t^2 - 2u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから、

$$2(u^2 - t^2)(11t^2 - 2u^2) = w^2 \quad (12)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $11t^2 - 2u^2$  は奇数であるから、

$$\gcd(2(u^2 - t^2), 11t^2 - 2u^2) = \gcd(u^2 - t^2, 11t^2 - 2u^2)$$

$\gcd(t, u) = 1$  より

$$\begin{aligned}
\gcd(u^2 - t^2, u^2) &= \gcd(t^2, u^2) = 1 \\
\gcd(u^2 - t^2, 11t^2 - 2u^2) &= \gcd(u^2 - t^2, 11(t^2 - u^2) + 9u^2) \\
&= \gcd(u^2 - t^2, 9u^2) \\
&= \gcd(u^2 - t^2, 9) \\
&= 1, 3, 9
\end{aligned}$$

であるから、(12)より

$$\begin{aligned}
(2(u^2 - t^2), 11t^2 - 2u^2) &= (g^2, h^2), (-g^2, -h^2), (3g^2, 3h^2), \\
&\quad (-3g^2, -3h^2), (9g^2, 9h^2), (-9g^2, -9h^2)
\end{aligned}$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数  $g, h$  ( $g$  は偶数、 $h$  は奇数) が存在する。

$t, u, h$  は奇数であり、

$$11t^2 - 2u^2 \equiv 11 - 2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから、

$$2u^2 - 2t^2 = g^2, \quad 11t^2 - 2u^2 = h^2 \quad (13)$$

または

$$2u^2 - 2t^2 = 9g^2, \quad 11t^2 - 2u^2 = 9h^2 \quad (14)$$

の場合に限られる。

(13)のとき， $u$ を消去すると

$$g^2 + h^2 = 9t^2$$

となる。 $g$ と $h$ は互いに素であり， $g$ は偶数， $h$ は奇数であるから，ピタゴラス方程式の定理<sup>注2</sup>を適用すると

$$g = 2mn, \quad h = m^2 - n^2, \quad 3t = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素な自然数 $m, n$ が存在する。ところが， $m^2 + n^2$ は3の倍数であるから

$m, n$ はともに3で割り切れる<sup>注3</sup>

ことになり，互いに素であることに反する。

(14)のとき， $u$ を消去すると

$$g^2 + h^2 = t^2$$

となるから，(13)と同様に，ピタゴラス方程式の定理<sup>注2</sup>を適用すると

$$g = 2mn, \quad h = m^2 - n^2, \quad t = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素な自然数 $m, n$ が存在する。(14)の第1式に代入すると，

$$2u^2 = 2t^2 + 9g^2 = 2(m^2 + n^2)^2 + 9(2mn)^2$$

$$u^2 = m^4 + 20m^2n^2 + n^4$$

ところが，(6)，(1)より

$$u^2 < 4u^2v^2 = y^2 \leq y^4 < z^2$$

となって， $z$ の最小性に反する。

**注 1** 原始解とは， $x, y, z$  が互いに素(最大公約数が 1)である整数解のことである。  
本稿においては， $(a, b, c)$  が解ならば  $(ad, bd, cd^2)$  も解となるので，無条件で「無数」と主張してもナンセンスである。

**注 2** 互いに素な自然数  $x, y, z$  がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき，

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数  $m, n$  が存在する。

証明は読者に委ねるが，必要ならば [1] pp.20–22 などを参照されるとよい。

**注 3** 平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であり， $m^2 + n^2$  を 3 で割った余りは

$$0^2 + 0^2 \equiv 0, \quad 0^2 + 1^2 \equiv 1, \quad 1^2 + 1^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

すべての場合が尽くされるから， $m^2 + n^2$  が 3 で割り切れるのは  $m, n$  がともに 3 で割り切れる場合に限られる。

## 参考文献

[1] 足立恒雄，フェルマーの大定理，筑摩書房 (2006).

[2] 大塚美紀生，方程式  $x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解，

早稲田数学フォーラム (2023),

<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+16x2y2+y4=z2.pdf>

[3] 大塚美紀生，方程式  $x^4 + 19x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解，

早稲田数学フォーラム (2024),

<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+19x2y2+y4=z2.pdf>