

方程式 $x^4 + 20x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

不定方程式

$$\begin{aligned}x^4 + 8x^2y^2 + y^4 &= z^2, \\x^4 + 12x^2y^2 + y^4 &= z^2, \\x^4 + 16x^2y^2 + y^4 &= z^2\end{aligned}$$

には原始解^{注1}が無数に存在したので、方程式 $x^4 + 20x^2y^2 + y^4 = z^2$ の場合も同様ではないかと予想していたが、実際には異なる結果が得られた。係数の値などから解の構造を判断する指標は、まだまだ見出せないようである。

定理 不定方程式

$$x^4 + 20x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

定理の証明

(1)を満たす自然数 x, y, z が存在すると仮定して、そのうち z が最小

となる場合を考えることにする。

$d = \gcd(x, y)$ とすると、(1)より $d^4 \mid z^2$ であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し、

$$x_1^4 + 20x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

を満たすから、

x と y が互いに素

であるとして証明すれば十分である。

x, y がともに奇数であるとすれば、

$$x^4 + 20x^2y^2 + y^4 \equiv 1 + 20 + 1 \equiv 6 \pmod{8}$$

となって、 $z^2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$ と矛盾するから、 x と y の偶奇は異なる。(1)は x と y について対称であるから、

x は偶数、 y は奇数

である場合だけ考えればよい。このとき z は奇数である。

(1)を変形すると

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)^2 + 22x^2y^2 &= z^2 \\22x^2y^2 &= (z + x^2 - y^2)(z - x^2 + y^2) \\22\left(\frac{x}{2}\right)^2 y^2 &= \frac{z + x^2 - y^2}{2} \cdot \frac{z - x^2 + y^2}{2}\end{aligned} \quad (2)$$

ここで, $x^2 > y^2$ ならば $z + x^2 - y^2 > 0$ であり, (2) より $z - x^2 + y^2 > 0$ である。
 $x^2 < y^2$ ならば $z - x^2 + y^2 > 0$ であり, (2) より $z + x^2 - y^2 > 0$ であるから, いずれにしても

$$z + x^2 - y^2 > 0 \text{ かつ } z - x^2 + y^2 > 0$$

である。 $\frac{z + x^2 - y^2}{2}$ と $\frac{z - x^2 + y^2}{2}$ が共通の素因数 y を持つとすれば,

$$\begin{aligned} p \mid x^2 - y^2, p^2 \mid 22\left(\frac{x}{2}\right)^2 y^2 &\implies p \mid x^2 - y^2, p \mid x^2 y^2 \\ &\implies p \mid x^2, p \mid y^2 \end{aligned}$$

となって, x と y が互いに素であることに反するから,

$$\frac{z + x^2 - y^2}{2} \text{ と } \frac{z - x^2 + y^2}{2} \text{ は互いに素}$$

である。したがって, (2) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{z + x^2 - y^2}{2}, \frac{z - x^2 + y^2}{2}, \frac{xy}{2}\right) &= (22a^2, b^2, ab), \\ &= (b^2, 22a^2, ab), \\ &= (2a^2, 11b^2, ab), \\ &= (11b^2, 2a^2, ab) \end{aligned}$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数 a, b (b は奇数) が存在して,

$$xy = 2ab \tag{3}$$

$$|x^2 - y^2| = |22a^2 - b^2| \text{ または } |2a^2 - 11b^2| \tag{4}$$

$x^2 - y^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$ であることを考えて, a が奇数のとき

$$22a^2 - b^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 2a^2 - 11b^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

であるから,

$$x^2 - y^2 = b^2 - 22a^2 \text{ または } 2a^2 - 11b^2$$

a が偶数のとき

$$22a^2 - b^2 \equiv -1 \pmod{8}, \quad 2a^2 - 11b^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

であるから,

$$x^2 - y^2 = 22a^2 - b^2 \quad (x \text{ は } 4 \text{ の倍数})$$

または

$$x^2 - y^2 = 11b^2 - 2a^2 \quad (x \text{ は } 4 \text{ で割れない偶数})$$

以下, (4)において $x^2 - y^2$ が

$$b^2 - 22a^2, \quad 2a^2 - 11b^2, \quad 22a^2 - b^2, \quad 11b^2 - 2a^2$$

のいずれであるかによって場合分けして調べていくことにする。

$\gcd(y, b) = s$ とおくと,

$$y = st, \quad b = su \tag{5}$$

を満たす互いに素な正の奇数 t, u が存在する。(3)より

$$xt = 2au$$

であるが, t と $2u$ は互いに素であるから,

$$x = 2uv, \quad a = tv \quad (6)$$

を満たす自然数 v が存在する。

I $x^2 - y^2 = b^2 - 22a^2$ (a, b はともに奇数) のとき

(5), (6) を代入すると

$$\begin{aligned} 4u^2v^2 - s^2t^2 &= s^2u^2 - 22t^2v^2 \\ (t^2 + u^2)s^2 &= 2(11t^2 + 2u^2)v^2 \end{aligned}$$

となって,

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{2(11t^2 + 2u^2)}{t^2 + v^2} = \frac{2(t^2 + u^2)(11t^2 + 2u^2)}{(t^2 + v^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$2(t^2 + u^2)(11t^2 + 2u^2) = w^2 \quad (7)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $11t^2 + 2u^2$ は奇数であるから,

$$\gcd(2(t^2 + u^2), 11t^2 + 2u^2) = \gcd(t^2 + u^2, 11t^2 + 2u^2)$$

$\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 + u^2, t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(t^2 + u^2, 11t^2 + 2u^2) &= \gcd((t^2 + u^2, 9t^2 + 2(t^2 + u^2))) \\ &= \gcd(t^2 + u^2, 9t^2) \\ &= \gcd(t^2 + u^2, 9) \\ &= 1, 3, 9 \end{aligned}$$

であるから, (7) より

$$(2(t^2 + u^2), 11t^2 + 2u^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数 g, h (g は偶数, h は奇数) が存在する。

t, u, h は奇数であり,

$$11t^2 + 2u^2 \equiv 11 + 2 \equiv 5 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから, いずれの場合もあてはまらない。

II $x^2 - y^2 = 2a^2 - 11b^2$ (a, b はともに奇数) のとき

(5), (6) を代入すると

$$\begin{aligned} 4u^2v^2 - s^2t^2 &= 2t^2v^2 - 11s^2u^2 \\ (t^2 - 11u^2)s^2 &= 2(2u^2 - t^2)v^2 \end{aligned}$$

となって, $t^2 - 11u^2 \equiv 1 - 11 \equiv 6 \pmod{8}$ を考えると

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{2(2u^2 - t^2)}{t^2 - 11u^2} = \frac{2(t^2 - 11u^2)(2u^2 - t^2)}{(t^2 - 11u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$2(t^2 - 11u^2)(2u^2 - t^2) = w^2 \quad (8)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $2u^2 - t^2$ は奇数であるから,

$$\gcd(2(t^2 - 11u^2), 2u^2 - t^2) = \gcd(t^2 - 11u^2, 2u^2 - t^2)$$

$\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned}\gcd(u^2, 2u^2 - t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(t^2 - 11u^2, 2u^2 - t^2) &= \gcd(t^2 - 2u^2 - 9u^2, 2u^2 - t^2) \\ &= \gcd(9u^2, 2u^2 - t^2) \\ &= \gcd(9, 2u^2 - t^2) \\ &= 1, 3, 9\end{aligned}$$

であるから, (8)より

$$\begin{aligned}(2(t^2 - 11u^2), 2u^2 - t^2) &= (g^2, h^2), (-g^2, -h^2), (3g^2, 3h^2), \\ &\quad (-3g^2, -3h^2), (9g^2, 9h^2), (-9g^2, -9h^2)\end{aligned}$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数 g, h (g は偶数, h は奇数) が存在する。

t, u, h は奇数であり,

$$2u^2 - t^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから,

$$2t^2 - 22u^2 = g^2, \quad 2u^2 - t^2 = h^2 \quad (9)$$

または

$$2t^2 - 22u^2 = 9g^2, \quad 2u^2 - t^2 = 9h^2 \quad (10)$$

の場合に限られる。

(9)のとき, t を消去すると

$$g^2 + 2h^2 = -18u^2$$

となって, 左辺は正, 右辺は負であるから矛盾する。

(10)のときも, t を消去すると

$$g^2 + 2h^2 = -2u^2$$

となって, 左辺は正, 右辺は負であるから矛盾する。

III $x^2 - y^2 = 11b^2 - 2a^2$ (a は偶数, b は奇数) のとき

(5), (6)を代入すると

$$\begin{aligned}4u^2v^2 - s^2t^2 &= 11s^2u^2 - 2t^2v^2 \\ (t^2 + 11u^2)s^2 &= 2(t^2 + 2u^2)v^2\end{aligned}$$

となって,

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{2(t^2 + 2u^2)}{t^2 + 11u^2} = \frac{2(t^2 + 11u^2)(t^2 + 2u^2)}{(t^2 + 11u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから,

$$2(t^2 + 11u^2)(t^2 + 2u^2) = w^2 \quad (11)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $t^2 + 2u^2$ は奇数であるから,

$$\gcd(2(t^2 + 11u^2), t^2 + 2u^2) = \gcd(t^2 + 11u^2, t^2 + 2u^2)$$

$\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned}\gcd(u^2, t^2 + 2u^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(t^2 + 11u^2, t^2 + 2u^2) &= \gcd(t^2 + 2u^2 + 9u^2, t^2 + 2u^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gcd(9u^2, t^2 + 2u^2) \\
&= \gcd(9, t^2 + 2u^2) \\
&= 1, 3, 9
\end{aligned}$$

であるから , (11) より

$$(2(t^2 + 11u^2), t^2 + 2u^2) = (g^2, h^2), (3g^2, 3h^2), (9g^2, 9h^2)$$

のいずれかを満たすような互いに素な自然数 g, h が存在する。 t, u は奇数であり ,

$$t^2 + 11u^2 \equiv 1 + 11 \equiv 4 \pmod{8}$$

であるから , $t^2 + 11u^2$ は 2^2 で割れるが , 2^3 で割れない。 よって ,

$$2(t^2 + 11u^2) \text{ は } 2 \text{ でちょうど } 3 \text{ 回割り切れる。}$$

ところが , $g^2, 3g^2, 9g^2$ はいずれも 2 で偶数回割り切れるから矛盾する。

IV $x^2 - y^2 = 22a^2 - b^2$ (a は偶数 , b は奇数) のとき

(5), (6) を代入すると

$$4u^2v^2 - s^2t^2 = 22t^2v^2 - s^2u^2$$

$$2(11t^2 - 2u^2)v^2 = (u^2 - t^2)s^2$$

となって , $11t^2 - 2u^2$ が奇数であることを考えると

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{u^2 - t^2}{2(11t^2 - 2u^2)} = \frac{2(u^2 - t^2)(11t^2 - 2u^2)}{2(11t^2 - 2u^2)^2}$$

は有理数の平方であるから ,

$$2(u^2 - t^2)(11t^2 - 2u^2) = w^2 \tag{12}$$

を満たす自然数 w が存在する。 $11t^2 - 2u^2$ は奇数であるから ,

$$\gcd(2(u^2 - t^2), 11t^2 - 2u^2) = \gcd(u^2 - t^2, 11t^2 - 2u^2)$$

$\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(u^2 - t^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$$\gcd(u^2 - t^2, 11t^2 - 2u^2) = \gcd(u^2 - t^2, 11(t^2 - u^2) + 9u^2)$$

$$= \gcd(u^2 - t^2, 9u^2)$$

$$= \gcd(u^2 - t^2, 9)$$

$$= 1, 3, 9$$

であるから , (12) より

$$\begin{aligned}
(2(u^2 - t^2), 11t^2 - 2u^2) &= (g^2, h^2), (-g^2, -h^2), (3g^2, 3h^2), \\
&\quad (-3g^2, -3h^2), (9g^2, 9h^2), (-9g^2, -9h^2)
\end{aligned}$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h (g は偶数 , h は奇数) が存在する。

t, u, h は奇数であり ,

$$11t^2 - 2u^2 \equiv 11 - 2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから ,

$$2u^2 - 2t^2 = g^2, \quad 11t^2 - 2u^2 = h^2 \tag{13}$$

または

$$2u^2 - 2t^2 = 9g^2, \quad 11t^2 - 2u^2 = 9h^2 \tag{14}$$

の場合に限られる。

(13)のとき， u を消去すると

$$g^2 + h^2 = 9t^2$$

となる。 g と h は互いに素であり， g は偶数， h は奇数であるから，ピタゴラス方程式の定理^{注2}を適用すると

$$g = 2mn, \quad h = m^2 - n^2, \quad 3t = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在する。ところが， $m^2 + n^2$ は 3 の倍数であるから

$$m, n \text{ はともに } 3 \text{ で割り切れる}^{\text{注3}}$$

ことになり，互いに素であることに反する。

(14)のとき， u を消去すると

$$g^2 + h^2 = t^2$$

となるから，(13)と同様に，ピタゴラス方程式の定理^{注2}を適用すると

$$g = 2mn, \quad h = m^2 - n^2, \quad t = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在する。(14)の第 1 式に代入すると，

$$2u^2 = 2t^2 + 9g^2 = 2(m^2 + n^2)^2 + 9(2mn)^2$$

$$u^2 = m^4 + 20m^2n^2 + n^4$$

ところが，(6), (1) より

$$u^2 < 4u^2v^2 = y^2 \leq y^4 < z^2$$

となって， z の最小性に反する。

注 1 原始解とは, x, y, z が互いに素(最大公約数が 1)である整数解のことである。
 本稿においては, (a, b, c) が解ならば (ad, bd, cd^2) も解となるので, 無条件で「無数」と主張してもナンセンスである。

注 2 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが, 必要ならば [1] pp.20–22 などを参照されるとよい。

注 3 平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であり, $m^2 + n^2$ を 3 で割った余りは

$$0^2 + 0^2 \equiv 0, \quad 0^2 + 1^2 \equiv 1, \quad 1^2 + 1^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

ですべての場合が尽くされるから, $m^2 + n^2$ が 3 で割り切れるのは m, n がともに 3 で割り切れる場合に限られる。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 16x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
 早稲田数学フォーラム (2023),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+16x2y2+y4=z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 19x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
 早稲田数学フォーラム (2024),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+19x2y2+y4=z2.pdf>