

方程式 $x^4 + 30x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

[2]において紹介したように，方程式

$$x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を変数変換

$$2x = a + b, \quad 2y = a - b$$

により

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 = z^2$$

と書き換える妙手がある。この手法が功を奏するのはめったにないが，探してみると方程式

$$x^4 + 30x^2y^2 + y^4 = z^2$$

でも上手くいくことがわかったので，本稿で取り上げてみようと思う。実は，この技巧により方程式 $x^4 + 30x^2y^2 + y^4 = z^2$ を解くのが短くなるわけではなく，別の不定方程式を巻き込んで2つまとめて解くところに本質がある。

定理1 自然数 x, y, z が方程式

$$2x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 = z^2$$

を満たすならば， $x = y$ である。

定理2 方程式

$$x^4 + 30x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

定理1の証明

方程式

$$2x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) で

$$x \neq y$$

となるものがあるとすれば，その中で

z が最小

となる場合が存在するはずである。そのとき， $\delta = \gcd(x, y)$ とすると， $\delta^4 \mid z^2$ より

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta^2 z_1$$

を満たす自然数 x_1, y_1, z_1 が存在して

$$2x_1^2 - 3x_1^2y_1^2 + 2y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つ。 z の最小性より $\delta = 1$ となるから,

x と y は互いに素

である。ここで, x が奇数, y が偶数であるとすれば,

$$x^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad y^2 \equiv 0 \text{ または } 4 \pmod{8},$$

$$2x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 \equiv 2 \text{ または } 6 \pmod{8}$$

となって, $z^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ より (1) が成り立つことに反する。

x が偶数, y が奇数としても同様に矛盾するから,

x, y はともに奇数

である。このとき, z も奇数である。

(1) を変形すると

$$2(x^2 - y^2)^2 + (xy)^2 = z^2$$

$$2(x^2 - y^2)^2 = (z + xy)(z - xy)$$

$$2\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2 = \frac{z + xy}{2} \cdot \frac{z - xy}{2} \tag{2}$$

$\frac{z + xy}{2}$ と $\frac{z - xy}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば,

$$p \mid xy \quad \text{かつ} \quad p^2 \mid 2\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2$$

$p \mid xy$ より

$$p \mid x \quad \text{または} \quad p \mid y$$

$p^2 \mid 2\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2$ より $p \mid x^2 - y^2$ であり, いずれの場合も $p \mid x$ かつ $p \mid y$ となって矛盾するから,

$$\frac{z + xy}{2} \quad \text{と} \quad \frac{z - xy}{2} \quad \text{は互いに素}$$

である。(2) より

$$\left(\frac{|x^2 - y^2|}{2}, \frac{z + xy}{2}, \frac{z - xy}{2}\right) = (k\ell, k^2, 2\ell^2) \quad \text{または} \quad (k\ell, 2\ell^2, k^2)$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ (k は奇数) が存在する。対称性より

$$x > y$$

としてよいから,

$$x^2 - y^2 = 2k\ell \tag{3}$$

$$xy = |k^2 - 2\ell^2| \tag{4}$$

$\gcd(x + y, k) = s$ とおくと, s は奇数であり,

$$x + y = 2st, \quad k = su \tag{5}$$

を満たす互いに素な自然数 t, u (u は奇数) が存在する。

$x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{4}$ であるから, (3) より ℓ は偶数であり,

$$t(x - y) = u\ell$$

t と u は互いに素で, u は奇数であるから,

$$x - y = 2uv, \quad \ell = 2tv \quad (6)$$

を満たす自然数 v が存在する。(5)かつ(6)より

$$x = st + uv, \quad y = st - uv \quad (7)$$

(5), (6), (7)を(4)に代入すると

$$(st + uv)(st - uv) = |s^2u^2 - 8t^2v^2| \quad (8)$$

I $xy = k^2 - 2\ell^2$ のとき, (8)は

$$s^2t^2 - u^2v^2 = s^2u^2 - 8t^2v^2$$

$$(t^2 - u^2)s^2 = (u^2 - 8t^2)v^2$$

$u^2 = 8t^2$ とすると, 2の指数が左辺は偶数, 右辺は奇数となって素因数分解の一意性に反するから,

$$u^2 - 8t^2 \neq 0 \text{ したがって } t^2 - u^2 \neq 0$$

両辺を $(t^2 - u^2)v^2$ で割ることにより

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{u^2 - 8t^2}{t^2 - u^2} = \frac{(t^2 - u^2)(u^2 - 8t^2)}{(t^2 - u^2)^2}$$

が成り立つから,

$$(t^2 - u^2)(u^2 - 8t^2) = w^2 \quad (9)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(t^2 - u^2, t^2) = \gcd(u^2, t^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 - u^2, u^2 - 8t^2) &= \gcd(t^2 - u^2, (u^2 - t^2) - 7t^2) \\ &= \gcd(t^2 - u^2, 7t^2) \\ &= \gcd(t^2 - u^2, 7) \\ &= 1 \text{ または } 7 \end{aligned}$$

であるから,

$$(t^2 - u^2, u^2 - 8t^2) = (g^2, h^2), (-g^2, -h^2), (7g^2, 7h^2), (-7g^2, -7h^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数 g, h (h は奇数) が存在する。

$u^2 - 8t^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$(t^2 - u^2, u^2 - 8t^2) = (g^2, h^2) \text{ または } (-7g^2, -7h^2)$$

ここで t が偶数であるとすれば, $t^2 - u^2 \equiv 3$ または $7 \pmod{8}$ となって, g^2 にも $-7g^2$ にも一致しないから,

t は奇数

である。

IA

$$t^2 - u^2 = g^2 \quad (10)$$

$$u^2 - 8t^2 = h^2 \quad (11)$$

のとき, t と u は互いに素な正の奇数であることを考えて, ピタゴラス方程式の定

理^{注1}を(10)に適用すると,

$$t = m^2 + n^2, \quad u = m^2 - n^2, \quad g = 2mn$$

を満たす自然数 m, n が存在する。このとき, (11) より

$$h^2 = (m^2 - n^2)^2 - 8(m^2 + n^2)^2 = -7m^4 - 18m^2n^2 - 7n^4$$

となるから矛盾する。

IB

$$t^2 - u^2 = -7g^2 \tag{12}$$

$$u^2 - 8t^2 = -7h^2 \tag{13}$$

のとき, (12) + (13) より

$$-7t^2 = -7g^2 - 7h^2$$

$$t^2 = g^2 + h^2$$

g と h は互いに素, t と h は奇数, g は偶数であることを考えて, ピタゴラス方程式の定理^{注1}を適用すると,

$$t = m^2 + n^2, \quad g = 2mn, \quad h = m^2 - n^2$$

を満たす自然数 m, n が存在する。(12)に代入すると

$$u^2 = (m^2 + n^2)^2 + 7(2mn)^2 = m^4 + 30m^2n^2 + n^4$$

両辺を 16 倍して

$$(4u)^2 = (2m)^4 + 30(2m)^2(2n)^2 + (2n)^4$$

$h = m^2 - n^2 > 0$ より $m > n$ であることを考えると

$$2m = a + b, \quad 2n = a - b$$

を満たす自然数 a, b が存在して

$$(4u)^2 = (a + b)^4 + 30(a^2 - b^2)^2 + (a - b)^4$$

$$= 32a^4 - 48a^2b^2 + 32b^4$$

$$2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 = u^2 \tag{14}$$

(5), (3), (2) より

$$u^2 \leq s^2u^2 = k^2 < 4k^2\ell^2 = (x^2 - y^2)^2 < 2(x^2 - y^2)^2 + (xy)^2 = z^2$$

であるから, (14)の成立は z の最小性に反する。

II $xy = -k^2 + 2\ell^2$ のとき, (8)は

$$s^2t^2 - u^2v^2 = -s^2u^2 + 8t^2v^2$$

$$(t^2 + u^2)s^2 = (8t^2 + u^2)v^2 \tag{15}$$

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{8t^2 + u^2}{t^2 + u^2} = \frac{(t^2 + u^2)(8t^2 + u^2)}{(t^2 + u^2)^2}$$

この式の値は有理数の平方であるから,

$$(t^2 + u^2)(8t^2 + u^2) = w^2 \tag{16}$$

を満たす自然数 w が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned}
\gcd(t^2 + u^2, t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\
\gcd(t^2 + u^2, 8t^2 + u^2) &= \gcd(t^2 + u^2, 7t^2 + (t^2 + u^2)) \\
&= \gcd(t^2 + u^2, 7t^2) \\
&= \gcd(t^2 + u^2, 7) \\
&= 1 \text{ または } 7
\end{aligned}$$

であるから, (16) より

$$(t^2 + u^2, 8t^2 + u^2) = (g^2, h^2) \text{ または } (7g^2, 7h^2)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h (h は奇数) が存在する。

$8t^2 + u^2 \equiv 1 \pmod{8}, h^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$t^2 + u^2 = g^2 \tag{17}$$

$$8t^2 + u^2 = h^2 \tag{18}$$

に限られる。

t と u は互いに素で, u は奇数であるから, (17) にピタゴラス方程式の定理^{註1} を適用することができて,

$$t = 2mn, u = m^2 - n^2, g = m^2 + n^2$$

を満たす自然数 m, n が存在する。(18) に代入すると

$$8(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = h^2$$

$$m^4 + 30m^2n^2 + n^4 = h^4$$

両辺 16 倍すると

$$(2m)^4 + 30(2m)^2(2n)^2 + (2n)^4 = 16h^2$$

$u = m^2 - n^2 > 0$ より $m > n$ であることを考えると

$$2m = a + b, 2n = a - b$$

を満たす自然数 a, b が存在して

$$(a + b)^4 + 30(a^2 - b^2)^2 + (a - b)^4 = 16h^2$$

$$32a^4 - 48a^2b^2 + 32b^4 = 16h^2$$

$$2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 = h^2 \tag{19}$$

(18), (15), (5), (3), (2) および $x > y$ より

$$h^2 \leq (8t^2 + u^2)v^2 = (st)^2 + (su)^2$$

$$< (2st)^2 + k^2$$

$$< (x + y)^2(x - y)^2 + 4k^2\ell^2 = 2(x^2 - y^2)^2 < z^2$$

であるから, (19) の成立は z の最小性に反する。

以上により, 定理 1 は証明された。

定理 2 の証明

実質的には定理 1 の証明で終わっているが、繰り返しを厭わず述べることにしよう。
方程式

$$x^4 + 30x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (20)$$

を満たす自然数 x, y, z が存在するとすれば、両辺 16 倍して

$$(2x)^4 + 30(2x)^2(2y)^2 + (2y)^4 = (4z)^2 \quad (21)$$

x と y について対称であるから、

$$x \geq y$$

として証明すれば、一般に示せたことになる。このとき

$$a = x + y, \quad b = x - y \quad (22)$$

とおくと、 a は正の整数、 b は非負整数であり、

$$2x = a + b, \quad 2y = a - b$$

(21) に代入して

$$\begin{aligned} (a+b)^4 + 30(a^2 - b^2)^2 + (a-b)^4 &= (4z)^2 \\ 32a^4 - 48a^2b^2 + 32b^4 &= 16z^2 \\ 2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 &= z^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$b > 0$ とすれば、定理 1 より

$$a = b$$

となるが、(22) より

$$a > b$$

であるから矛盾する。ゆえに

$$b = 0$$

ということになるが、そのとき (23) は

$$2a^4 = z^2$$

となって、素因数分解の 2 の指数が左辺は奇数、右辺は偶数であるから矛盾する。

よって、方程式 (20) は自然数解をもたない。

注 1 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが, 必要ならば [1] pp.20–22 などを参照されるとよい。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2021),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+14x2y2+y4=z2.pdf>