

# 方程式 $x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

[1]では方程式  $x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2$  が非自明な整数解をもたないことが証明<sup>註1</sup>され、[2]では方程式  $x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = z^2$  が非自明な整数解をもたないことが証明されている。本稿では、方程式  $x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = z^2$  について考える。

定理 不定方程式

$$x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす正の整数  $x, y, z$  は存在しない。

定理の証明

$$x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす正の整数  $x, y, z$  が存在すると仮定すれば、その中で

$z$  が最小

となるときがあるはずである。ここで、 $x$  と  $y$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p^4 | z^2$  となるから  $p^2 | z$  であり、

$$x = px_1, \quad y = py_1, \quad z = p^2z_1$$

を満たす正の整数  $x_1, y_1, z_1$  が存在する。(1)に代入して両辺を  $p^4$  で割ると

$$x_1^4 + 4x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立ち、 $z_1 < p^2z_1$  であるから、 $z$  の最小性に反する。よって、

$x$  と  $y$  は互いに素

である。特に、少なくとも一方は奇数でなければならないが、 $x$  と  $y$  がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}$  ゆえ  $x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \equiv 2 \not\equiv z^2 \pmod{4}$  となって矛盾するから、 $x$  と  $y$  の一方は奇数で、他方は偶数となる。(1)が  $x$  と  $y$  について対称であることを考えて、

$x$  は偶数、 $y$  は奇数

として定理を証明すれば十分である。

(1)を変形して

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 3y^4 = z^2$$

$$(x^2 + 2y^2)^2 - z^2 = 3y^4$$

$$\therefore (x^2 + 2y^2 + z)(x^2 + 2y^2 - z) = 3y^4 \tag{2}$$

ここで、 $x^2 + 2y^2 + z$  と  $x^2 + 2y^2 - z$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p$  は

$$(x^2 + 2y^2 + z) - (x^2 + 2y^2 - z) = 2z$$

と  $3y^4$  を割り、 $3y^4$  は奇数であるから、 $p | z$  である。 $p$  が素数であることと、(2)より  $p^2 | 3y^4$  であることを用いると

$$p^2 | 3y^4 \implies p | y^4 \implies p | y$$

となるが, (1)より  $p|x$  となって,  $x$  と  $y$  が互いに素であることに反する。よって,

$$\gcd(x^2 + 2y^2 + z, x^2 + 2y^2 - z) = 1 \quad (3)$$

である。

(2), (3)より, 互いに素な正の整数  $a, b$  を用いて

$$x^2 + 2y^2 + z = 3a^4, \quad x^2 + 2y^2 - z = b^4, \quad y = ab$$

または

$$x^2 + 2y^2 + z = b^4, \quad x^2 + 2y^2 - z = 3a^4, \quad y = ab$$

と表される。いずれの場合も

$$2(x^2 + 2y^2) = 3a^4 + b^4, \quad y = ab$$

$$2x^2 = 3a^4 - 4a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)(3a^2 - b^2)$$

$$\therefore 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{3a^2 - b^2}{2} \quad (4)$$

ここで,  $a, b$  が奇数であることより

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 3a^2 - b^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

であるから,

$$\frac{a^2 - b^2}{2} \text{ は偶数, } \frac{3a^2 - b^2}{2} \text{ は奇数 (ともに整数)} \quad (5)$$

である。また,

$$a^2 = \frac{3a^2 - b^2}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad b^2 = \frac{3a^2 - b^2}{2} - 3 \cdot \frac{a^2 - b^2}{2}$$

は互いに素である (共通な素因数をもたない) から,

$$\gcd\left(\frac{a^2 - b^2}{2}, \frac{3a^2 - b^2}{2}\right) = 1 \quad (6)$$

である。(4), (5), (6)より

$$\frac{a^2 - b^2}{2} = \pm 2c^2, \quad \frac{3a^2 - b^2}{2} = \pm d^2 \quad (\text{複号同順})$$

を満たす (互いに素な) 正の整数  $c, d$  が存在する。

$$\frac{3a^2 - b^2}{2} = -d^2 \text{ であるとすれば, } a, b, d \text{ が奇数であることより}$$

$$3a^2 - b^2 + 2d^2 \equiv 3 - 1 + 2 \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{8}$$

となって矛盾するから, 実際には

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \quad (7)$$

$$d^2 = \frac{3a^2 - b^2}{2} \quad (8)$$

の場合に限られる。

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

は互いに素であるから,

$$\gcd\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) = 1 \quad (9)$$

であり, (7), (9)より

$$\frac{a+b}{2} = m^2, \quad \frac{a-b}{2} = n^2, \quad c = mn$$

を満たす正の整数  $m, n$  が存在する。これを整理すると

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2$$

と表されるから, (8)より

$$d^2 = \frac{3(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2}{2} = m^4 + 4m^2n^2 + n^4$$

したがって,  $(x, y, z) = (m, n, d)$  は (1)の正の整数解であるが, (8), (4), (1)より

$$d^2 \leq 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 < x^2 \leq x^4 < z^2$$

であるから,  $z$  の最小性に反する。

(証明おわり)

注 1 公式には,

$$\begin{aligned} & \text{T.Venkatesh, On Integer Solutions of } x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2, \\ & \text{Indian J. pure appl. Math., 26(9), 837-839 (1995)} \end{aligned}$$

で証明されたことになっているが, その証明に不備があるので, [1]において修正した証明を与えたのであった。

参考文献

- [1] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解, 早稲田数学フォーラム (2014)  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+5x2y2+y4=z2.pdf>
- [2] S.T.Smith, On the diophantine equation  $x^{10} \pm y^{10} = z^2$ , J. Pure Appl. Algebra, 79 (1992) 87-108